МІНІСТЕРСТВО
ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МІНІСТЕРСТВО БУДІВНИЦТВА,
АРХІТЕКТУРИ ТА ЖИТЛОВО-КОМУНАЛЬНОГО
ГОСПОДАРСТВА УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЖИТЛОВО-КОМУНАЛЬНОГО ГОСПОДАРСТВА

КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ДИСЦИПЛІН

Навчальний посібник

“ВИЩА МАТЕМАТИКА”

(частина I)

для студентів економічних спеціальностей та менеджменту

Київ 2005

УДК 517 (076)
ББК 22.1я73
В 55

Маловічко Володимир Опанасович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина І

Навчальний посібник

Коректор Риченда О.П.
Редактор Акуленко Т.І.
Комп'ютерний набір Маловічко В.О.

Підписано до друку 14.11.2005 р. Формат 60 х 84/16.
Ум. друк. арк. 12,5. Наклад 300 прим. Друк офсетний.
Зам. № 609.
Відділ оперативної поліграфії ДАЖКГ,
01042, Київ, вул. Глазунова, 2/4.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІНІСТЕРСТВО БУДІВНИЦТВА, АРХІТЕКТУРИ І ЖИТЛОВО-КОМУНАЛЬНОГО ГОСПОДАРСТВА
ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЖИТЛОВО-КОМУНАЛЬНОГО ГОСПОДАРСТВА

Кафедра фундаментальних дисциплін

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина І
Навчальний посібник
Для студентів економічних спеціальностей та менеджменту

ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЖИТЛОВО-КОМУНАЛЬНОГО ГОСПОДАРСТВА
Ідентифікаційний код 19020330
БІБЛІОТЕКА

Київ - 2005

УДК 517 (076)
ББК 22.1я73
В 55

Вища математика. Ч. І. Навчальний посібник. – К.: **ДАЖКГ**, 2005. – 100 с.

Укладач Маловічко В.О., кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Коротко викладено найважливіші теоретичні поняття курсу вищої математики, рекомендовані типовою навчальною програмою Міністерства освіти і науки України для студентів економічних спеціальностей та менеджменту, наведено приклади розв'язування типових задач, запропоновано задачі для самостійного розв'язування, подано список використаної літератури.

Посібник можна використовувати як для роботи під керівництвом викладача, так і для самостійного вивчення курсу вищої математики.

Рецензенти: Ільєнко А.Б., кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач;
Ткаченко Н.В., кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри фундаментальних дисциплін 1 вересня 2005 року, протокол № 1

Рекомендовано до друку навчально-методичною радою Державної академії житлово-комунального господарства 18 жовтня 2005 року, протокол № 1

Відповідальний за випуск завідувач кафедри кандидат фіз.-мат. наук доцент Маловічко В.О.

© Маловічко В.О., 2005
© ДАЖКГ, 2005

інтервалах $(-\infty;0)$, $(0;1)$; зростає на інтервалі $(1;+\infty)$; $y_{\min}=y(1)=3$; 3) спадає на інтервалах $(-1;0)$, $(2;+\infty)$; зростає на інтервалах $(-\infty;-1)$, $(0;2)$; $y_{\max}=y(-1)=12\frac{5}{12}$, $y_{\max}=y(2)=14\frac{2}{3}$, $y_{\min}=y(0)=12$; 4) спадає на інтервалах $(-2;0)$, $(0;2)$; зростає на інтервалах $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$; $y_{\max}=y(-2)=-4$, $y_{\min}=y(2)=4$.

6. 1) опукла на $(-\infty;0)$, угнута на $(0;+\infty)$, точка перегину $(0;0)$; 2) опукла на $(-\infty;2)$, угнута на $(2;+\infty)$, точка перегину $\left(2;-\frac{8}{3}\right)$; 3) опукла на $(-\infty;1)$, угнута на $(1;+\infty)$, точка перегину $(1;-5)$; 4) опукла на $(0;+\infty)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Вища математика. – К.: НАУ, 1999.*
2. *Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993.*
3. *Вища математика. Збірник задач. Навч. посібник / В.П.Дубовик, І.І.Юрик, І.П.Вовкодав та ін.; За ред. В.П.Дубовика, І.І.Юрика. – К.: Вища школа, 1999.*
4. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1971–1986.*
5. *Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1982.*
6. *Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2000.*
7. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1975.*
8. *Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. – К.: Либідь, 1994.*
9. *Яблонский А.И. Высшая математика. Общий курс. – Минск: Высшая школа, 1993.*

3) $y=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+12$.

4) $y=x+\frac{4}{x}$.

6. Знайти інтервали опуклості, угнутості й точки перегину кривої.

1) $y=x^3$.

2) $y=\frac{x^3}{6}-x^2$.

3) $y=x^3-3x^2-7x+4$.

4) $y=\ln x$.

Відповіді до задач теми 4

1. 1) $-\frac{2}{x^2}+5x^4$; 2) $\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$; 3) $2e^x\cos x$; 4) $\frac{1}{(x+1)^2}$; 5) $x\cos x$;

6) $-2x^{-\frac{5}{2}}-5x^{\frac{3}{2}}-8x^{-5}$; 7) $\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$; 8) $\frac{2}{(\cos x-\sin x)^2}$; 9) $\frac{1}{1+\cos x}$.

2. 1) $6(1+3x)$; 2) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; 4) $\frac{2}{1-4x^2}$; 5) $\frac{6\,\mathrm{arctg}\,3x}{1+9x^2}$;

6) $\arcsin\frac{x}{3}$; 7) $\mathrm{tg}^3 x$; 8) $5^x\ln 5\cdot\cos(5^x)$; 9) $4^{\sin x}\ln 2\cdot\cos x$;

10) $-\sin(x+\mathrm{tg}\,x)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$; 11) $15(1+5x)^2$; 12) $-\mathrm{tg}\,x$; 13) $\frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}}$;

14) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$; 15) $\frac{2}{1+x^2}$; 16) $-\frac{2^{\frac{1}{x}}\ln 2}{x^2}$; 17) $e^{\sqrt{x}}$; 18) $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$;

19) $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$; 20) $2^{1+\ln^2 x}\ln 2\cdot\frac{\ln x}{x}$.

3. 1) $e^{-x^2}(4x-2)$; 2) $-2e^x\sin x$; 3) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; 4) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}$; 5) $-2\cos 2x$;

6) $2\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{2x}{1+x^2}$; 7) $\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

4. 1) 2; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $+\infty$; 4) 3; 5) 1; 6) -1; 7) $-\frac{1}{2}$; 8) $\ln 3$; 9) 0; 10) -1;

11) 0; 12) -2.

5. 1) спадає на інтервалах $(-\infty;-2)$, $(0;3)$; зростає на інтервалах $(-2;0)$, $(3;+\infty)$;

$y_{\min}=y(-2)=-\frac{7}{3}$, $y_{\min}=y(3)=-12{,}75$, $y_{\max}=y(0)=3$; 2) спадає на

ЗМІСТ

Вступ 5

Тема 1. Елементи лінійної алгебри 6

1. Матриці 6
2. Визначники другого і третього порядків та їх властивості 9
3. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця. Визначник n-го порядку 10
4. Ранг матриці 12
5. Обернена матриця 13
6. Системи лінійних рівнянь 14
7. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь 15
8. Розв'язування систем лінійних рівнянь за правилом Крамера 16
9. Методи Гаусса і Жордана-Гаусса 19
10. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз) 22

Задачі до теми 1 26

Відповіді до задач теми 1 29

Тема 2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії 30

1. Вектори 30
2. Лінійні дії з векторами 31
3. Проекція вектора на вісь 32
4. Координати векторів 33
5. Поняття про n-вимірний простір 34
6. Лінійна залежність векторів. Розкладання вектора за базисом 35
7. Скалярний добуток векторів 38
8. Векторний добуток векторів 41
9. Мішаний добуток векторів 43
10. Рівняння прямої на площині 44
11. Площина в просторі 49
12. Рівняння прямої у просторі 54

13. Лінії другого порядку 57
Задачі до теми 2 64
Відповіді до задач теми 2 67
Тема 3. Вступ до математичного аналізу 69
1. Границя числової послідовності 69
2. Границя функції 71
3. Нескінченно малі і нескінченно великі величини 72
4. Обчислення границь 73
5. Неперервність функції 77
Задачі до теми 3 79
Відповіді до задач теми 3 80
Тема 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної 80
1. Похідна функції 80
2. Правило Лопіталя 83
3. Геометричний зміст похідної 84
4. Диференціал 85
5. Зростання і спадання функцій. Екстремуми функцій 86
6. Найбільше і найменше значення функції 88
7. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину 90
8. Асимптоти кривих 90
9. Побудова графіків функцій 91
10. Еластичність функції 94
Задачі до теми 4 96
Відповіді до задач теми 4 98
Список використаної літератури 99

7) $y=\ln\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$. 8) $y=\sin(5^x)$.

9) $y=4^{\sin x}$. 10) $y=\cos(x+\operatorname{tg}x)$.

11) $y=(1+5x)^3$. 12) $y=\ln\cos x$.

13) $y=\sqrt[3]{(2-3x)^2}$. 14) $y=\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

15) $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$. 16) $y=2^{\frac{1}{x}}$.

17) $y=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$. 18) $y=\cos\frac{1}{x}$.

19) $y=e^{\sqrt{\ln x}}$. 20) $y=2^{\ln^2 x}$.

3. Знайти похідні другого порядку функцій.

1) $y=e^{-x^2}$. 2) $y=e^x\cos x$. 3) $y=\ln\sin x$.

4) $y=\operatorname{tg}x$. 5) $y=\cos^2 x$. 6) $y=(x^2+1)\operatorname{arctg}x$.

7) $y=\operatorname{acrtg}x^2$. 8) $y=\sqrt{1+x^2}$.

4. Обчислити границі за правилом Лопіталя.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-e^{x^2}}$. 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$. 5) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$. 6) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\ln\operatorname{ctg}x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$. 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\operatorname{arctg}x}$. 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

10) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}$. 11) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$. 12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\operatorname{tg}x$.

5. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції.

1) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-3x^2+3$. 2) $y=\frac{2}{x}+x^2$.

Якщо попит еластичний, то $E_p(q) < -1$, $D'_p < 0$, і дохід із збільшенням ціни спадає; якщо ж попит нееластичний, то $-1 < E_p(q) < 0$, $D'_p > 0$, і дохід із збільшенням ціни зростає. Якщо ж попит адекватний вартості ($E_p(q) = -1$), то $D'_p = 0$ і дохід не змінюється.

Розглянемо тепер, як залежить дохід від попиту (кількості проданих виробів).

$$D'_q = \frac{d}{dq}(pq) = p + q\frac{dp}{dq} = p\left(1 + \frac{q}{p}\cdot\frac{dp}{dq}\right) = p\,(1 + E_q(p)) = p\left(1 + \frac{1}{E_p(q)}\right)$$

Якщо попит еластичний, то $E_p(q) < -1$, $D'_q > 0$, і дохід із збільшенням попиту зростає; якщо ж попит нееластичний, то $-1 < E_p(q) < 0$, $D'_q < 0$ і дохід із збільшенням попиту спадає. Якщо ж попит адекватний вартості ($E_p(q) = -1$), то $D'_q = 0$, і дохід не змінюється.

Задачі до теми 4

1. Знайти похідні функцій.

1) $y = \frac{2}{x} + x^5 + 1$. 2) $y = x\sqrt[3]{x^5}$. 3) $y = e^x(\sin x + \cos x)$.

4) $y = \frac{x}{x+1}$. 5) $y = x\sin x + \cos x$. 6) $y = 3x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-4}$.

7) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$. 8) $y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$. 9) $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$.

2. Знайти похідні функцій.

1) $y = (1+3x)^2$. 2) $y = \mathrm{tg}^2\, x$.

3) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. 4) $y = \ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

5) $y = \mathrm{arctg}^2\, 3x$. 6) $y = x\arcsin\frac{x}{3} + \sqrt{9-x^2}$.

ВСТУП

У сучасних умовах господарювання в різних галузях економіки й управління все ширшого застосування набувають математичні методи, які дають можливість вивчати на науковій основі як діяльність окремих підприємств, так і загальні соціально-економічні процеси в суспільстві. Тому підготовка сучасного спеціаліста з економічних дисциплін вимагає наявності в нього належних математичних знань та вміння ефективно ними користуватися.

Курс вищої математики має не тільки важливе самостійне значення, але й закладає теоретичну основу для подальшого вивчення таких математичних дисциплін, як “Теорія ймовірностей та математична статистика”, “Математичне програмування”, “Дослідження операцій”, “Економетрія”.

У даному посібнику коротко викладено найважливіші теоретичні поняття курсу вищої математики, рекомендовані типовою навчальною програмою Міністерства освіти і науки України для студентів економічних спеціальностей та менеджменту, наведено приклади розв’язування типових задач, вміщено багато задач для самостійного розв’язання, подано список використаної літератури.

Посібник можна використовувати як для роботи під керівництвом викладача, так і для самостійного вивчення курсу вищої математики.

Тема 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. МАТРИЦІ

Поняття "матриця" й оснований на ньому розділ математики – матрична алгебра – мають дуже важливе значення для економістів. Пояснюється це тим, що значна частина математичних моделей економічних об'єктів і процесів записується в досить простій і компактній матричній формі.

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел a_{ij}, складена з m рядків та n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо хочуть вказати розмір матриці A, то пишуть $A_{m\times n}$. Коротко матриці позначають так: $A=(a_{ij})$, або $A_{m\times n}=(a_{ij})$. Числа a_{ij} називаються елементами матриці, причому i – номер рядка, j – номер стовпця.

Дві матриці однакового розміру $A_{m\times n}=(a_{ij})$ і $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називаються ***рівними***, якщо в них рівні всі відповідні елементи: $a_{ij}=b_{ij}$.

Матриця $A_{n\times n}$, у якої число рядків дорівнює числу стовпців і дорівнює n, називається ***квадратною матрицею n-го порядку.***

Матриця, у якої всього один рядок, називається ***матрицею-рядком***, а матриця, у якої всього один стовпець, – ***матрицею-стовпцем***.

Елементи матриці a_{ii}, у яких номер стовпця дорівнює номеру рядка, називаються ***діагональними*** й утворюють ***головну діагональ*** матриці.

Якщо всі недіагональні елементи квадратної матриці дорівнюють нулю, то така матриця називається ***діагональною***.

Якщо у діагональної матриці n-го порядку всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, то така матриця називається ***одиничною матрицею n-го порядку*** і позначається буквою E.

10. ЕЛАСТИЧНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Еластичністю $E_x(y)$ ***функції*** $y=f(x)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту її аргументу x, коли $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\cdot y'.$$

Еластичність функції показує наближено на скільки відсотків зміниться значення функції $y=f(x)$ при зміні її аргументу x на 1%.

Властивості еластичності функції

1. $E_x(uv)=E_x(u)+E_x(u)$.
2. $E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(u)$.
3. $E_x(y)=\frac{1}{E_y(x)}$.

Еластичність функції застосовується, зокрема, при аналізі співвідношення між попитом і ціною. Наприклад, еластичність $E_p(q)$ попиту q (кількості проданих виробів) відносно ціни p одного виробу показує, на скільки відсотків зміниться попит при зміні ціни на 1%.

Якщо $E_p(q)<-1$, попит називають ***еластичним***, при $-1<E_p(q)<0$ – ***нееластичним***, а при $E_p(q)=-1$ попит називають ***адекватним*** вартості.

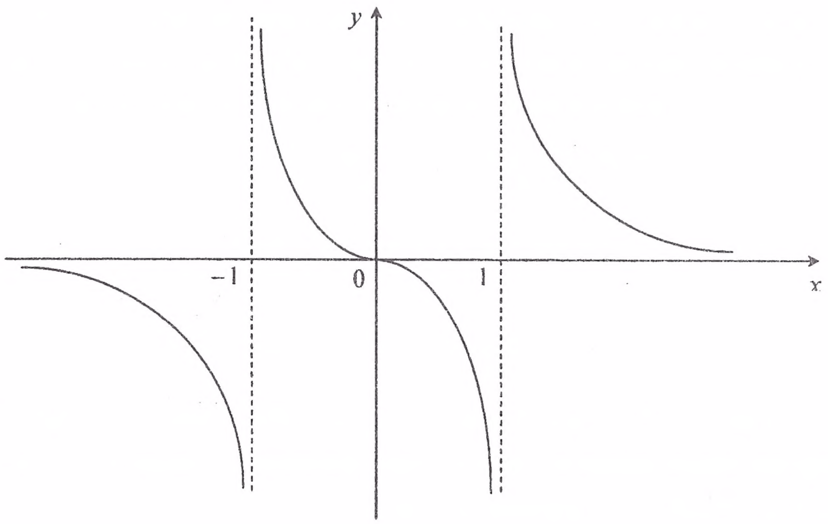
З'ясуємо, наприклад, як впливає еластичність попиту відносно ціни на сукупний дохід $D=pq$ при реалізації продукції. Вважаючи, що $q=q(p)$ – довільна диференційована функція, маємо

$$D'_p=\frac{d}{dp}(pq)=q+p\frac{dq}{dp}=q\left(1+\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}\right)=q\,(1+E_p(q)).$$

y'	–	–	–	–	–
y''	–	+	0	–	+
y	↘ ∩	↘ ∪	0 точка перегину	↘ ∩	↘ ∪

7) ***Асимптоти.*** Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y=0$, при $x\to\infty$.

8) За ***результатами*** досліджень побудуємо ***графік функції.***



9) ***Область значень функції*** : $E(y)=(-\infty;+\infty)$.

Матриця будь-якого розміру називається ***нульовою***, або ***нуль-матрицею***, якщо всі її елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою O.

Дії над матрицями

1. Множення матриці на число

Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на число α називається матриця $B_{m\times n}=(b_{ij})=(\alpha a_{ij})$.

2. Додавання матриць

Сумою $C=A+B$ двох матриць однакового розміру $A_{m\times n}=(a_{ij})$ і $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називається матриця

$$C_{m\times n}=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}).$$

3. Віднімання матриць

Різницею $C=A-B$ двох матриць однакового розміру $A_{m\times n}=(a_{ij})$ і $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називається матриця

$$C_{m\times n}=(c_{ij})=(a_{ij}-b_{ij}).$$

4. Множення матриць

Матриця A називається ***узгодженою*** з матрицею B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B.

Якщо матриця A узгоджена з матрицею B, то добутком $C=AB$ матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times k}=(b_{ij})$ називається така матриця $C_{m\times k}=(c_{ij})$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj},\quad i=1,\,2,\ldots,m;\ j=1,\,2,\ldots,k.$$

5. Транспонування матриць

Матриця $A^{\mathrm{T}}=(a_{ij}^{\mathrm{T}})$ називається ***транспонованою*** до матриці $A=(a_{ij})$, якщо $a_{ij}^{\mathrm{T}}=a_{ji}$. Інакше кажучи, щоб одержати матрицю A^{T}, треба в матриці A рядки й стовпці поміняти місцями. Наприклад:

$$A_{3\times2}=\begin{pmatrix}2&-2\\1&4\\3&7\end{pmatrix},\quad\Rightarrow\quad A^{T}_{2\times3}=\begin{pmatrix}2&1&3\\-2&4&7\end{pmatrix}.$$

<u>Приклад 1.1.</u> Знайти матрицю $C=(2A+B^{T})B$, де

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\5&-1&-3\\4&3&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5&2&-3\\4&-2&0\\1&2&6\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. При множенні матриці на число всі її елементи множаться на це число. Тому

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix}3&1&-2\\5&-1&-3\\4&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2&-4\\10&-2&-6\\8&6&4\end{pmatrix}.$$

Щоб знайти матрицю B^{T}, транспоновану до матриці B, треба в матриці B рядки й стовпці поміняти місцями:

$$B^{T}=\begin{pmatrix}5&4&1\\2&-2&2\\-3&0&6\end{pmatrix}.$$

Оскільки при відніманні матриць віднімаються всі їх відповідні елементи, то:

$$2A+B^{T}=\begin{pmatrix}6&2&-4\\10&-2&-6\\8&6&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&4&1\\2&-2&2\\-3&0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&6&-3\\12&-4&-4\\5&6&10\end{pmatrix}.$$

Кількість стовпців матриці $3A-B^{T}$ дорівнює кількості рядків матриці A. Тому ці матриці узгоджені і їх можна перемножити, користуючись правилом множення матриць:

$$C=(2A+B^{T})B=\begin{pmatrix}11&6&-3\\12&-4&-4\\5&6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2&-3\\4&-2&0\\1&2&6\end{pmatrix}=$$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{x^2-1}=\left\{\frac{-1}{+0}\right\}=-\infty,\qquad x=-1 \text{ – точка розриву другого роду},$$
$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{x^2-1}=\left\{\frac{-1}{-0}\right\}=+\infty,\quad\Rightarrow\quad x=-1 \text{ – вертикальна асимптота графіка}.$$

$x=1$:

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x}{x^2-1}=\left\{\frac{1}{-0}\right\}=-\infty,\qquad x=1 \text{ – точка розриву другого роду},$$
$$\lim_{x\to1+0}\frac{x}{x^2-1}=\left\{\frac{1}{+0}\right\}=+\infty,\quad\Rightarrow\quad x=1 \text{ – вертикальна асимптота графіка}.$$

6) ***Монотонність, екстремуми, опуклість, вгнутість точки перегину.***

Знайдемо критичні точки 1-го і 2-го роду, тобто точки, в яких дорівнює нулю або не існує відповідна перша чи друга похідна даної функції. Маємо

$$y'=\frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2},$$

$$y''=-\frac{2x(x^2-1)^2-(x^2+1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=-\frac{2x(x^2-1)(x^2-1-2x^2-2)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Похідні y' і y'' не існують лише при $x=\pm1$, тобто тільки в тих точках, які не належать області визначення функції. Тому критичними точками будуть лише ті точки, де похідні y' і y'' дорівнюють нулю.

Оскільки $y'\neq0$, то критичних точок 1-го роду немає. Похідна y'' дорівнює нулю при $x=0$, тому $x=0$ – критична точка 2-го роду.

Таким чином, y' зберігає сталий знак у кожному з інтервалів $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$, а y'' – у кожному з інтервалів $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$.

Щоб визначити знаки похідних y', y'' у кожному з указаних інтервалів, достатньо визначити знаки похідних у якій-небудь точці кожного інтервалу. Результати такого дослідження зручно звести в таблицю.

x	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	$(1;+\infty)$

9) побудувати графік функції, враховуючи результати досліджень, проведених у п. 1–8;

10) знайти область значень функції.

Якщо функція парна (або непарна), то достатньо побудувати її графік лише для $x \geq 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі Oy (або відносно початку координат).

Приклад 4.4. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання

1) ***Область визначення функції*** (позначається $D(y)$). Знаменник дробу повинен бути відмінним від нуля, тому $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq \pm 1$,

$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) ***Парність, непарність функції.*** Оскільки

$$y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -y(x),$$

то дана функція непарна. Зазначимо, що графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

3) ***Періодичність функції.*** Функція неперіодична.

4) ***Точки перетину графіка функції з координатними осями.***

$$Ox:\ y = 0, \quad \frac{x}{x^2 - 1} = 0, \quad x = 0, \quad (0; 0).$$

$$Oy:\ x = 0, \quad y = \frac{0}{0^2 - 1} = 0, \quad (0; 0).$$

5) ***Неперервність функції*** (треба знайти та дослідити точки розриву функції).

Функція неперервна в усіх точках, які належать області визначення функції, і має розриви в точках $x = \pm 1$. Дослідимо характер розриву в точках $x = \pm 1$.

$x = -1$:

$$= \begin{pmatrix} 11 \cdot 5 + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 1 & 11 \cdot 2 + 6 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 & 11 \cdot (-3) + 6 \cdot 0 - 3 \cdot 6 \\ 12 \cdot 5 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 & 12 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 & 12 \cdot (-3) - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 6 \\ 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 1 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-2) + 10 \cdot 2 & 5 \cdot (-3) + 6 \cdot 0 + 10 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 76 & 4 & -51 \\ 40 & 24 & -60 \\ 59 & 18 & 45 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 76 & 4 & -51 \\ 40 & 24 & -60 \\ 59 & 18 & 45 \end{pmatrix}$.

2. ВИЗНАЧНИКИ ДРУГОГО І ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Визначником матриці другого порядку $A = (a_{ij})$, або ***визначником другого порядку*** називається число, яке обчислюється за формулою:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Визначником матриці третього порядку $A = (a_{ij})$, або ***визначником третього порядку*** називається число, яке обчислюється за формулою:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Цю формулу легко запам'ятати, користуючись схемою, яка називається ***правилом трикутників***:

Властивості визначників

1. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється.
2. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці) визначника, то визначник змінить знак.
3. Якщо один із рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.
4. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
5. Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника.
6. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

3. РОЗКЛАД ВИЗНАЧНИКА ЗА ЕЛЕМЕНТАМИ РЯДКА АБО СТОВПЦЯ. ВИЗНАЧНИК n-го ПОРЯДКУ

Нехай задано визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.1)$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника викресленням i-го рядка і j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. Наприклад, для даного визначника

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \; A_{11}=M_{11}, \; A_{32}=-M_{32}.$$

Можна нарисувати таку схему:

8. АСИМПТОТИ КРИВИХ

Пряма l називається ***асимптотою кривої***, якщо відстань від змінної точки $M(x;y)$ кривої до прямої l прямує до нуля, коли точка $M(x;y)$, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Розрізняють вертикальні й невертикальні (похилі) асимптоти (горизонтальні асимптоти розглядають як окремі випадки похилих асимптот).

Для існування похилої асимптоти $x=x_0$ необхідно і достатньо, щоб хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ дорівнювала нескінченності.

Похилу асимптоту $y=kx+b$ можна знайти, користуючись формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \qquad (4.1)$$

Якщо хоча б одна з границь (4.1) не існує або дорівнює нескінченності, то крива похилих асимптот не має.

<u>**Зауваження 4.5.**</u> Асимптоти кривої при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$ можуть бути різні. У цьому випадку границі у формулах (4.1) потрібно обчислювати окремо при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$.

9. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Дослідити функцію та побудувати її графік можна за такою схемою:

1) знайти область визначення функції;
2) дослідити функцію на парність та непарність;
3) дослідити функцію на періодичність;
4) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями;
5) дослідити функцію на неперервність (знайти та дослідити точки розриву функції);
6) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
7) знайти інтервали опуклості, вгнутості, точки перегину;
8) знайти асимптоти графіка функції;

$$A(0{,}2) = -0{,}75 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 1{,}2 = 1{,}23;$$
$$\max_{[0;\,1]} A(x) = A(0{,}2) = 1{,}23.$$

Отже, за даних умов найвигідніше інвестувати у виробництво $0{,}2$ млн. гривень.

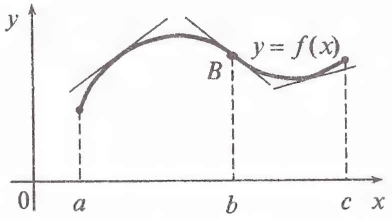
Відповідь: $0{,}2$ млн гривень.

7. ОПУКЛІСТЬ І ВГНУТІСТЬ КРИВИХ. ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

Крива $y = f(x)$ називається ***опуклою*** на деякому інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається ***вгнутою*** на деякому інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Точка, яка відділяє опуклу частину кривої від угнутої, називається ***точкою перегину***.



На рисунку крива $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(a;b)$, вгнута на інтервалі $(b;c)$ і точка $B(b; f(b))$ – точка перегину.

<u>Теорема 4.5.</u> ***Якщо в усіх точках інтервалу*** $(a;b)$ $f''(x) < 0$, ***то крива*** $y = f(x)$ ***на цьому інтервалі опукла; якщо ж в усіх точках інтервалу*** $(a;b)$ $f''(x) > 0$, ***то крива*** $y = f(x)$ ***на цьому інтервалі вгнута.***

Точки, в яких $f''(x) = 0$ або не існує, називаються ***критичними точками другого роду***.

<u>Теорема 4.6.</u> ***Нехай*** x_0 ***– критична точка другого роду функції*** $y = f(x)$. ***Якщо при переході через точку*** x_0 ***похідна*** $f''(x)$ ***змінює знак, то точка*** $(x_0; f(x_0))$ ***є точкою перегину кривої*** $y = f(x)$.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix},$$

де знаком "+" позначені місця тих елементів, для яких алгебраїчні доповнення й мінори рівні між собою, а знаком "–" – місця тих елементів, для яких алгебраїчні доповнення й мінори відрізняються знаком.

<u>Теорема 1.1.</u> ***Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.***

Наприклад, для визначника (1.1)

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},\ \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Ці формули дають ще один спосіб обчислення визначника, який називається розкладом визначника за елементами відповідного рядка або стовпця.

<u>Приклад 1.2.</u> Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ -6 & 4 & 7 \end{vmatrix},$$

розкладаючи його за елементами першого рядка.

Розв'язання

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ -6 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-14 - 20) - 2 \cdot (7 + 30) + 4 \cdot (4 - 12) = -208.$$

Відповідь: -208.

<u>Теорема 1.2.</u> ***Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.***

Теорема 1.1 дає змогу дати означення визначника будь-якого порядку. За означенням визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

4. РАНГ МАТРИЦІ

Нехай задано матрицю $A_{m\times n}$. Виділимо в цій матриці будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де $k \le \min(m,n)$.

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається ***мінором k-го порядку матриці A***.

Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

З цього означення випливає, що:

1) ранг існує для будь-якої матриці $A_{m\times n}$, причому
$$0 \le r(A) \le \min(m,n);$$
2) $r(A)=0$ тоді і лише тоді, коли матриця $A=O$;
3) для квадратної матриці n-го порядку $r(A)=n$ тоді і лише тоді, коли матриця A невироджена.

Квадратна матриця A називається ***невиродженою,*** якщо $|A|\ne 0$, і ***виродженою***, якщо $|A|=0$.

Визначення рангу матриці перебором усіх мінорів потребує обчислення великої кількості визначників. Простіший метод ґрунтується на тому, що ранг матриці не зміниться, якщо над матрицею виконати так звані ***елементарні перетворення***, а саме:

1) переставити місцями два рядки (стовпці);
2) помножити кожний елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;
3) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

Приклад 1.3. Визначити ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках і в точках $x=a$, $x=b$;
3) серед обчислених значень вибрати найбільші і найменші.

Приклад 4.3. Капітал в 1 млн. гривень може бути частково внесений у банк під 20% річних, а частково інвестований у виробництво з ефективністю 100%. При інвестуванні у виробництво витрати задаються квадратичною залежністю з коефіцієнтом пропорційності $k=1$, а прибуток оподатковується за ставкою 25%. Визначити, яку частку капіталу найвигідніше інвестувати у виробництво.

Розв'язання. Нехай x млн гривень інвестується у виробництво, а $(1-x)$ вноситься в банк під відсотки. Тоді внесений капітал через рік буде дорівнювати
$$(1-x)\left(1+\frac{20}{100}\right)=1,2-1,2x,$$
а інвестований капітал:
$$x\left(1+\frac{100}{100}\right)=2x.$$

Витрати становитимуть x^2, прибуток від інвестування у виробництво $(2x-x^2)$, податок
$$(2x-x^2)\frac{25}{100}=0,25(2x-x^2).$$
Тому чистий прибуток становитиме:
$$2x-x^2-0,25(2x-x^2)=0,75(2x-x^2).$$
Загальна величина капіталу через рік становитиме:
$$A(x)=1,2-1,2x+0,75(2x-x^2)=-0,75x^2+0,3x+1,2.$$

Для розв'язання задачі треба знайти найбільше значення функції $A(x)$ на відрізку $[0;1]$. Маємо:

$A'(x)=-1,5x+0,3$;

$A'(x)=0$ при $x=0,2$;

$A(0)=-0,75\cdot 0^2+0,3\cdot 0+1,2=1,2$;

це ще не означає, що функція в цій точці обов'язково має екстремум, тобто теорема Ферма дає тільки необхідну умову існування екстремуму, але не достатню. Наприклад, функція $y=x^3$ екстремуму не має, хоча її похідна в точці $x=0$ дорівнює нулю.

Зауваження 4.4. У точках, в яких похідна функції не існує, функція може мати максимум або мінімум, а може не мати ні того, ні іншого.

Значення аргументу, для яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються ***критичними точками***.

Зі сказаного вище випливає, що екстремальні значення функція може приймати лише в критичних точках, проте не в кожній критичній точці функція приймає екстремальне значення.

Теорема 4.4 **(достатня умова існування екстремуму).** ***Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому проміжку, що містить критичну точку x_0. Тоді***

1) якщо при переході зліва направо через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "+" на "–", то в точці x_0 функція має максимум;

2) якщо при переході зліва направо через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "–" на "+", то в точці x_0 функція має мінімум, тобто

$$\begin{cases} f'(x)>0, & \text{при} \quad x<x_0, \\ f'(x)<0, & \text{при} \quad x>x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{в точці } x_0 - \text{максимум;}$$

$$\begin{cases} f'(x)<0, & \text{при} \quad x<x_0, \\ f'(x)>0, & \text{при} \quad x>x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{в точці } x_0 - \text{мінімум.}$$

6. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Зі сказаного вище випливає, що неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $y=f(x)$ може досягати своїх найбільших і найменших на цьому відрізку значень лише на кінцях відрізка або в критичних точках, які належать інтервалу $(a;b)$. Тому, щоб знайти найбільші і найменші значення функції, яка неперервна на відрізку $[a;b]$, треба:

1) знайти критичні точки функції, які належать інтервалу $(a;b)$;

Розв'язання

Виконуючи над матрицею A елементарні перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -16 & -9 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 15 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 119 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & -39 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 119 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знак "~" між матрицями показує, що вони утворюються одна з одної елементарними перетвореннями і тому мають один і той самий ранг.

Оскільки є відмінний від нуля мінор третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

а всі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю, то $r(A)=3$.

Відповідь: $r(A)=3$.

5. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Теорема 1.3. ***Для існування оберненої матриці необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою (щоб $|A| \neq 0$).***

Якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

6. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Система m лінійних рівнянь з n невідомими x_1, $x_2, \dots, x_n$ має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Числа a_{ij} називаються ***коефіцієнтами***, числа b_i – ***вільними членами*** системи.

Система рівнянь називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, і ***неоднорідною***, якщо хоч один із них відмінний від нуля.

Набір чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ називається ***розв'язком*** системи (1.2), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ усі рівняння системи перетворяться у тотожності.

Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має розв'язків.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має лише один розв'язок, і ***невизначеною***, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

Дві системи називаються ***рівносильними*** або ***еквівалентними***, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків.

Якщо розглянуті в пункті 4 елементарні перетворення матриць виконувати над рядками системи (1.2), то будемо діставати системи, еквівалентні системі (1.2).

Систему (1.2) можна записати у матричній формі:

5. ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ ФУНКЦІЙ.

ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ

Теорема 4.2. 1) ***Якщо диференційована функція зростає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку невід'ємна.***

2) ***Якщо функція має додатну похідну в кожній точці деякого проміжку, то функція на цьому проміжку зростає.***

Теорема 4.3. 1) ***Якщо диференційована функція спадає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку недодатна.***

2) ***Якщо функція має від'ємну похідну в кожній точці деякого проміжку, то функція на цьому проміжку спадає.***

Геометричне пояснення цих теорем досить просте, якщо пригадати, що $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$.

Функція $f(x)$ в точці $x = x_1$ має ***локальний максимум***, якщо $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ для будь-яких Δx достатньо малих за абсолютною величиною.

Функція $f(x)$ в точці $x = x_2$ має ***локальний мінімум.***, якщо $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ для будь-яких Δx достатньо малих за абсолютною величиною.

Максимуми й мінімуми функції називають ***екстремумами***, або ***екстремальними значеннями функції.***

Зауваження 4.1. З означення екстремумів випливає, що функція, визначена на проміжку, може досягати екстремальних значень тільки всередині проміжку, але не на його кінцях.

Зауваження 4.2. Не слід вважати, що максимум і мінімум функції є відповідно її найбільшим і найменшим значенням на проміжку.

Теорема Ферма **(необхідна умова існування екстремуму).** ***Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ максимум або мінімум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$.***

Зауваження 4.3. Якщо в деякій точці похідна функції дорівнює нулю, то

Отже, геометричний зміст похідної такий: похідна $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту $k = \text{tg}\alpha$ дотичної до кривої, проведеної у точці $M_0(x_0; y_0)$.

4. ДИФЕРЕНЦІАЛ

Поняття диференціала тісно пов'язане з поняттям похідної і є одним із найважливіших у математиці. Диференціал наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x, тобто в цій точці має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x), \quad \text{де} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0,$$

звідки

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x.$$

Таким чином, приріст функції Δy дорівнює сумі двох доданків: $f'(x) \cdot \Delta x$ і $\alpha(x) \cdot \Delta x$. Другий з цих доданків прямує до 0 при $\Delta x \to 0$ швидше ніж Δx. Тому перший доданок $f'(x) \cdot \Delta x$ (якщо $f'(x) \neq 0$) є головною частиною приросту Δy функції $y = f(x)$, лінійною відносно приросту аргумента Δx.

Диференціалом dy ***функції*** $y = f(x)$ у точці x називається головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції $y = f(x)$ у цій точці:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx. Це дозволяє диференціал dy записати так:

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Остання формула дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

При цьому A називають ***матрицею системи***, або ***основною матрицею системи***, X – ***матрицею невідомих***, B – ***матрицею вільних членів***. Матрицю

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називають ***розширеною матрицею*** системи.

Вичерпну відповідь про розв'язність системи (1.2) дає нижчезазначена теорема.

Теорема 1.4 **(Кронекера-Капеллі).** ***Система лінійних рівнянь сумісна тоді і лише тоді, коли ранг її основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці.***

Якщо ранг основної матриці сумісної системи дорівнює числу невідомих ($r(A) = n$), то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг основної матриці сумісної системи менший числа невідомих ($r(A) < n$), то система має безліч розв'язків.

7. МАТРИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.3}$$

Запишемо цю систему у матричній формі:

$$AX = B. \qquad (1.4)$$

Припустимо, що матриця системи невироджена, тобто $|A| \neq 0$. Тоді існує обернена матриця A^{-1}.

Помножимо обидві частини рівності (1.4) на A^{-1} зліва

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Враховуючи, що $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, запишемо розв'язок системи (1.3) у вигляді

$$X = A^{-1}B.$$

Отже, щоб розв'язати систему рівнянь (1.3), коли матриця системи невироджена, досить знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її справа на матрицю вільних членів.

8. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗА ПРАВИЛОМ КРАМЕРА

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Визначник $\Delta = |A|$ основної матриці системи (1.5) називається ***визначником системи***, або ***основним визначником системи.***

Правило Крамера. ***Якщо основний визначник системи (1.5) не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:***

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1.6)$$

де Δ_i – допоміжний визначник, який одержується з основного визначника Δ заміною його і-го стовпця стовпцем вільних членів системи.

Формули (1.6) називаються ***формулами Крамера.***

Приклад 1.4. Розв'язати систему лінійних рівнянь

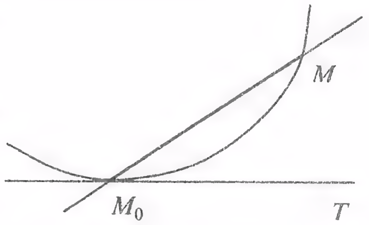
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x - 2x)'}{(4x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x - 2}{12x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{6x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x - 1)'}{(6x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{12x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = -\frac{1}{3}.$$

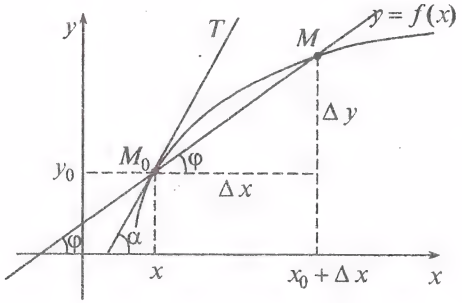
Відповіді: а) -1; б) $-\frac{1}{3}$.

3. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Візьмемо на кривій точки M_0 і M і проведемо січну M_0M. Коли точка M буде рухатись вздовж кривої, ця січна буде обертатись навколо точки M_0.



Дотичною до кривої в точці M_0 називається граничне положення M_0T січної M_0M, коли точка M вздовж кривої наближається до точки M_0.



Розглянемо графік функції $y = f(x)$. Нехай $M_0(x_0; y_0)$, $M(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$. Позначимо через φ кут між січною M_0M і віссю Ox. З рисунка видно, що $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо $\Delta x \to 0$, то $M \to M_0$ і кут φ буде змінюватися. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi = \alpha$, то пряма M_0T, що утворює з віссю Ox кут α, буде дотичною до кривої $y = f(x)$ у точці M_0.

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha.$$

г) $\left(\dfrac{\ln(2x+3)}{\cos^2 x}+\dfrac{2\operatorname{tg}x}{2x+3}\right)\cdot(2x+3)^{\operatorname{tg}x}$.

2. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

Розглянемо відношення $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, де функції $u(x)$ і $v(x)$ визначені і диференційовані в деякому околі точки $x=a$ (крім, можливо, самої точки a). Якщо при $x\to a$ функція $f(x)$ має невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$, то розкрити її можна, користуючись таким правилом:

<u>Теорема 4.1</u> **(правило Лопіталя).** ***Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо вона існує, тобто***

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\left\{\frac{0}{0}\ \text{або}\ \frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

<u>Приклад 4.2.</u> Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}$. Застосовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x)-x)'}{(e^x-x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(1+x)(e^x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{e^x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=-\lim_{x\to 0}\frac{x'}{(e^x-1)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=-1;$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x-x^2)'}{(x^4)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$\begin{cases}x_1-\ x_2+\ 2x_3=5,\\ 2x_1+2x_2-\ x_3=3,\\ 3x_1\qquad -\ 2x_3=-3\end{cases}$$

а) матричним методом; б) за правилом Крамера.

Розв'язання

а) **Матричний метод.** Запишемо дану систему рівнянь у матричній формі $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&2&-1\\3&0&-2\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5\\3\\-3\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X=A^{-1}B,$$

де A^{-1} – матриця, обернена до матриці A.

Знайдемо визначник матриці A:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&2&-1\\3&0&-2\end{vmatrix}=-4+3-12-4=-17\neq 0.$$

Матриця A невироджена, тому обернена матриця A^{-1} існує й знаходиться за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів a_{ij} матриці A.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&-1\\0&-2\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&-1\\3&-2\end{vmatrix}=1,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\3&0\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&2\\0&-2\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\3&-2\end{vmatrix}=-8,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&-1\\3&0\end{vmatrix}=-3,$$

ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЖИТЛОВО-КОМУНАЛЬНОГО ГОСПОДАРСТВА
БІБЛІОТЕКА

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4.$$

Складемо обернену матрицю $A^{-1}=-\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix}-4 & -2 & -3\\ 1 & -8 & 5\\ -6 & -3 & 4\end{pmatrix}$ і знайдемо розв'язок системи:

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4 & -2 & -3\\ 1 & -8 & 5\\ -6 & -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 3\\ -3\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\cdot 5-2\cdot 3-3\cdot(-3)\\ 1\cdot 5-8\cdot 3+5\cdot(-3)\\ -6\cdot 5-3\cdot 3+4\cdot(-3)\end{pmatrix}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-17\\ -34\\ -51\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$.

б) **Правило Крамера.** Оскільки

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}=-17\neq 0,$$

то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо допоміжні визначники системи Δ_i, які одержуються з основного визначника системи Δ заміною його i-го стовпця стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -1\\ -3 & 0 & -2\end{vmatrix}=-20-3+12-6=-17,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -3 & -2\end{vmatrix}=-6-15-12-18+20-3=-34,$$

Якщо функція $u=\varphi(x)$ має похідну $\varphi'(x)$ в точці x, а функція $y=F(u)$ має похідну $F'(u)$ у відповідній точці u, то складена функція $y=F(\varphi(x))$ в цій точці x має похідну $y'_x=F'(u)\cdot\varphi'(x)$, тобто похідна складеної функції дорівнює добутку похідної даної функції по проміжному аргументу u на похідну проміжного аргумента по x.

Це правило диференціювання складеної функції можна узагальнити на ланцюжок із довільного скінченного числа диференційованих функцій.

Користуючись правилом диференціювання складеної функції й таблицею похідних, дістанемо:

$$y'=2^{\arccos(\ln x)}\cdot\ln 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\right)\cdot\frac{1}{x}=-\frac{2^{\arccos(\ln x)}\cdot\ln 2}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

в) $y+x\ln y=5$. Функція задана у неявному вигляді. Щоб її продиференціювати, треба взяти похідну по x від обох частин рівності $y+x\ln y=$ $=5$, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y':

$$y'+\ln y+\frac{x}{y}y'=0,\qquad \left(1+\frac{x}{y}\right)y'=-\ln y,\qquad y'=-\frac{y\ln y}{x+y}.$$

Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

г) $y=(2x+3)^{\operatorname{tg}x}$. При знаходженні похідної показниково-степеневої функції доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції:

$$\ln y=\ln(2x+3)^{\operatorname{tg}x}\qquad \ln y=\operatorname{tg}x\cdot\ln(2x+3),$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln(2x+3)+\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{2x+3}\cdot 2,\qquad y'=\left(\frac{\ln(2x+3)}{\cos^2 x}+\frac{2\operatorname{tg}x}{2x+3}\right)\cdot y,$$

$$y'=\left(\frac{\ln(2x+3)}{\cos^2 x}+\frac{2\operatorname{tg}x}{2x+3}\right)\cdot(2x+3)^{\operatorname{tg}x}.$$

Відповіді: а) $\dfrac{(1+x^2)\operatorname{arcctg}x+2x}{2\sqrt{x}(1+x^2)\operatorname{arcctg}^2 x}$; б) $-\dfrac{2^{\arccos(\ln x)}\cdot\ln 2}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; в) $-\dfrac{y\ln y}{x+y}$;

Таблиця похідних

1. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\quad a)\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $\quad б)\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad в)\ (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

2. $(\sin x)' = \cos x$.

3. $(\cos x)' = -\sin x$.

4. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

6. $(a^x)' = a^x \ln a$.

7. $(e^x)' = e^x$.

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклад 4.1. Знайти похідні y' функцій:

а) $y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{arcctg} x}$; б) $y = 2^{\arccos(\ln x)}$; в) $y + x\ln y = 5$; г) $y = (2x+3)^{\operatorname{tg} x}$.

Розв'язання

а) $y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{arcctg} x}$. Користуючись правилом диференціювання частки

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

і таблицею похідних, дістанемо:

$$y' = \frac{(\sqrt{x})' \operatorname{arcctg} x - \sqrt{x}(\operatorname{arcctg} x)'}{(\operatorname{arcctg} x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{arcctg} x - \sqrt{x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\operatorname{arcctg}^2 x} =$$

$$= \frac{(1+x^2)\operatorname{arcctg} x + 2x}{2\sqrt{x}(1+x^2)\operatorname{arcctg}^2 x}.$$

б) $y = 2^{\arccos(\ln x)}$. Функція $y = f(x)$ називається складеною, якщо її можна записати у вигляді $y = F(\varphi(x))$ При цьому $u = \varphi(x)$ називають проміжним аргументом.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 9 - 30 - 6 = -51.$$

Розв'язок системи знайдемо за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-17}{-17} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-34}{-17} = 2 \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-51}{-17} = 3.$$

Відповідь: (1; 2; 3).

9. МЕТОДИ ГАУССА І ЖОРДАНА-ГАУССА

Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом і за правилом Крамера має два суттєвих недоліки:

1) ці методи придатні лише для визначених систем, тобто для систем, що мають єдиний розв'язок;
2) ці методи дуже трудомісткі.

Тому ці методи мають швидше теоретичний інтерес і малопридатні для розв'язання реальних економічних задач, які часто зводяться до систем із великою кількістю рівнянь і невідомих.

Розв'язувати довільні сумісні системи m лінійних рівнянь з n невідомими дозволяють методи Гаусса і Жордана-Гаусса. Суть методу Гаусса полягає в тому, що шляхом елементарних перетворень систему приводять до вигляду, коли всі елементи головної діагоналі основної матриці системи дорівнюють 1, а елементи основної матриці, які знаходяться нижче її головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Приклад 1.5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Розв'язання

Виконуючи елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи, дістанемо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & -8 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & -17/4 & -51/4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Оскільки основна A й розширена $\tilde{A}$ матриці системи мають рівні ранги $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$, то згідно з теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна. Крім того, оскільки ранг $r(A)$ дорівнює числу невідомих, то розв'язок системи буде єдиним.

Останньому вигляду розширеної матриці відповідає така система:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_2 - \dfrac{5}{4}x_3 = -\dfrac{7}{4}, \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3 + 5, \\ x_2 = \dfrac{5}{4}x_3 - \dfrac{7}{4}, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Звідси $x_3 = 3$, $x_2 = \frac{5}{4}\cdot 3 - \frac{7}{4} = \frac{8}{4} = 2$, $x_1 = 2 - 2\cdot 3 + 5 = 1$.

Відповідь: $(1;\ 2;\ 3)$.

Від методу Гаусса метод Жордана-Гаусса відрізняється тим, що в ньому шляхом елементарних перетворень роблять такими, що дорівнюють нулю не тільки ті елементи основної матриці системи, які лежать нижче її головної діагоналі, але й ті, які знаходяться вище головної діагоналі. Такий вигляд систем дозволяє знайти усі невідомі.

Познайомимось з методом Жордана-Гаусса на конкретному прикладі, причому будемо користуватися розробленою економістами технікою його застосування з використанням розрахункових таблиць.

<u>Приклад 1.6.</u> Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 9x_4 = 17, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$$

Жордана-Гаусса.

Тема 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x. Надамо змінній x приросту Δx так, щоб точка $x + \Delta x$ належала цьому околу. Внаслідок цього значення функції зміниться на величину

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

яка називається приростом функції у точці x.

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

то її називають ***похідною функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x і позначають одним із таких символів:

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad y'_x, \quad f'(x), \quad \frac{df}{dx}.$$

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням***. Якщо функція має похідну в точці x, то вона називається ***диференційованою*** в цій точці.

<u>Правила диференціювання</u>

Якщо $u(x)$, $v(x)$ – диференційовані функції, C – довільна стала, то

1. $C' = 0$.
2. $(Cu)' = Cu'$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(uv)' = u'v + uv'$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $(v \neq 0)$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x+4}$. 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$. 9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+3)-\ln x)$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\,\mathrm{tg}^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$. 11) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}\,6x)^{\frac{1}{\arcsin 3x}}$. 12) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{4\,\mathrm{ctg}^2 x}$.

Відповіді до задач теми 3

1. 1) -1; 2) 0; 3) $\frac{1}{8}$; 4) ∞; 5) 2; 6) ∞; 7) 0; 8) $\frac{1}{3}$; 9) -2.

2. 1) ∞; 2) ∞; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 4; 5) $\frac{3}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) 6; 8) $\frac{1}{3}$; 9) $\frac{9}{20}$.

3. 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) -2; 5) $\frac{1}{9}$; 6) 4; 7) 0; 8) -4; 9) $\frac{1}{2}$.

4. 1) ∞; 2) e^6; 3) e^6; 4) 1; 5) 1 6) e; 7) e^{-1}; 8) 1; 9) 3; 10) e^2; 11) e^2; 12) e^{-2}.

Розв'язання

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	k
1	2	–5	4	7	9
2	5	–12	9	17	21
0	–1	2	–1	–3	–3
1	2	–5	4	7	9
0	1	–2	1	3	3
0	–1	2	–1	–3	–3
1	0	–1	2	1	3
0	1	–2	1	3	3
0	0	0	0	0	0

Звідси видно, що основна й розширена матриці системи мають рівні ранги $r(A)=r(\tilde{A})=2$, а значить, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі, система сумісна. Знайдемо який-небудь мінор другого порядку, який не дорівнює нулю. Найзручніше взяти мінор

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Мінор, який не дорівнює нулю і має порядок, що дорівнює рангу $r=r(A)=r(\tilde{A})$, називають ***базисним мінором***. Тому обраний нами мінор – базисний.

Невідомі x_1, x_2, для яких елементи базисного мінору є коефіцієнтами, називають ***базисними невідомими***; інші невідомі x_3, x_4 називають ***вільними***.

Останній таблиці відповідає така система:

$$\begin{cases}x_1-x_3+2x_4=1,\\ x_2-2x_3+x_4=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3-2x_4+1,\\ x_2=2x_3-x_4+3.\end{cases}$$

Вільним невідомим x_3, x_4 можна надавати будь-які значення: $x_3=C_1$, $x_4=C_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі. Отже, одержуємо нескінченну множину розв'язків системи:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1-2C_2+1\\ 2C_1-C_2+3\\ C_1\\ C_2\end{pmatrix},\qquad C_1,\ C_2\in R.$$

Коли розв'язок залежить від будь-яких значень C_1 та C_2, його називають ***загальним розв'язком*** відповідної системи.

Якщо покласти $C_1 = C_2 = 0$, то відповідний розв'язок називають ***базисним***. У даному прикладі базисним є такий розв'язок:

$$X_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо одній сталій надати значення 1, а іншим – 0, то одержані розв'язки називають ***фундаментальними***. У даному прикладі є два фундаментальних розв'язки:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Невід'ємний базисний розв'язок називають ***опорним***.

Саме базисні, фундаментальні та опорні розв'язки систем лінійних рівнянь найчастіше використовують економісти.

10. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА БАГАТОГАЛУЗЕВОЇ ЕКОНОМІКИ (БАЛАНСОВИЙ АНАЛІЗ)

Метою балансового аналізу є відповідь на запитання, яке виникає в макроекономіці та пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким повинен бути обсяг виробництва кожної з n галузей, щоб задовольняти потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник деякої продукції, а з іншого – як споживач продукції і своєї, і виробленої іншими галузями.

Зв'язок між галузями, як правило, відображається в таблицях міжгалузевого балансу, а математична модель, яка дозволяє їх аналізувати, розроблена в 1936 р. американським економістом В.Леонтьєвим.

Задачі до теми 3

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4}{2-n}$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-n^2}{n^2+2n+2}$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^2 n}{(2n+1)^3}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n}{100n^2+12}$. 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n^2+1}}{n+8}$. 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2n+10}}{2n-1}$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+4n}}{10n+1}$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)(n+3)}}{3n+3}$ 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n+1}{n}\right)n$

2. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-1}{x+8}$. 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$. 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^4-1}$. 6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$.

7) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x-10}{\sqrt{x-1}-3}$. 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}-1}$. 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-x}-3\sqrt{x+1}}$.

3. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\operatorname{tg}x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos 2x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(1-x)}$. 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x\sin^2 3x}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\operatorname{arctg}x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin 3x}$. 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\ln(1-x^2)}$. 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^2}{\sin x\operatorname{tg}2x}$.

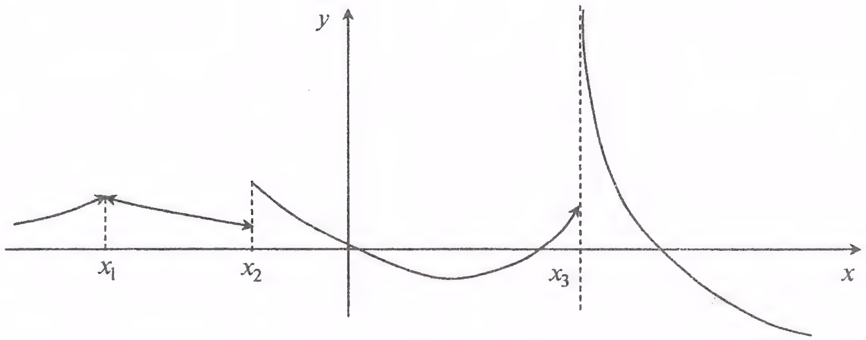
4. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{x+2}\right)^{x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-2}\right)^{4x-1}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{3x-4}\right)^{\frac{1}{x}}$. 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$. 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-2}$.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь $f(a-0)$, $f(a+0)$ не існує або дорівнює нескінченності, то розрив у точці $x=a$ називається ***розривом другого роду***, а сама точка $x=a$ – ***точкою розриву другого роду.***

Приклад 3.7. Функція $y=f(x)$, графік якої зображено на рисунку,



в точці x_1 має розрив першого роду усувний, в точці x_2 – розрив першого роду типу стрибка, в точці x_3 – розрив другого роду.

Справедливе таке твердження: якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці $x=a$, то в цій точці неперервні також функції

$$f(x)\pm g(x),\qquad f(x)\cdot g(x),\qquad \frac{f(x)}{g(x)}$$

(остання за умови, що $g(a)\neq 0$).

Функція називається ***неперервною на інтервалі***, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Припустимо, що розглядаються n галузей промисловості, кожна з яких виробляє свою продукцію. Частина продукції використовується для внутрішніх потреб даної галузі та іншими галузями, а інша частина виготовлена для кінцевого особистого й суспільного споживання.

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу (наприклад за рік).

Введемо позначення:

x_i – загальний (валовий) обсяг продукції i-ї галузі ($i = 1,2,\ldots, n$);

x_{ij} – обсяг продукції i-ї галузі, що використовується j-ю галуззю в процесі виробництва ($i, j = 1,2,\ldots, n$);

y_i – обсяг кінцевого продукту i-ї галузі для невиробничого споживання.

Оскільки валовий обсяг продукції будь-якої i-ї галузі дорівнює сумарному об'ємові продукції, яка використовується n галузями, та кінцевого продукту, то

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+y_i,\quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{1.7}$$

Рівняння (1.7) називаються ***співвідношеннями балансу.*** Будемо розглядати ***вартісний міжгалузевий баланс***, коли всі величини в (1.7) мають вартісний вираз.

Введемо ***коефіцієнт прямих витрат***

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j},\quad (i,j=1,2,\ldots,n),$$

який показує витрати продукції i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї галузі.

Можна вважати, що на деякому проміжку часу коефіцієнти a_{ij} будуть сталими та залежними від технології виробництва. Це означає лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску, тобто

$$x_{ij}=a_{ij}x_j,\quad (i,j=1,2,\ldots,n),$$

унаслідок чого модель міжгалузевого балансу одержала назву ***лінійної.***

Тепер співвідношення балансу (1.7) матимуть вигляд:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i, \quad (i = 1,2,\ldots,n). \qquad (1.8)$$

Систему (1.8) можна записати у матричному вигляді:

$$X = AX + Y, \qquad (1.9)$$

де X – ***вектор валового випуску***, Y – ***вектор кінцевого продукту***, $A = (a_{ij})$ – ***матриця прямих витрат*** (***технологічна*** або ***структурна матриця***).

Основне завдання міжгалузевого балансу полягає в тому, щоб знайти ***такий*** вектор валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Перепишемо рівняння (1.9) у вигляді:

$$(E - A)X = Y. \qquad (1.10)$$

Звідси, якщо матриця $(E - A)$ невироджена, тобто $|E - A| \neq 0$, знайдемо

$$X = (E - A)^{-1}Y. \qquad (1.11)$$

Матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається ***матрицею повних витрат.***

Матриця $A \geq 0$ називається ***продуктивною,*** якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв'язок $X \geq 0$ рівняння (1.10). В цьому випадку модель Леонтьєва також називається ***продуктивною.***

Існує декілька критеріїв продуктивності A. Один із них говорить про те, що матриця A продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпців не перевищує одиниці, причому хоча б для одного зі стовпців сума елементів строго менше одиниці.

Приклад 1.7. У таблиці наведені дані про виконання балансу за звітний період в умовних грошових одиницях:

Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий випуск
	Паливна промисловість	Металургія	Хімічна промисловість		
Паливна промисловість	8	18	26	46	98
Металургія	12	8	32	80	132
Хімічна промисловість	7	25	15	57	104

Розв'язання. Використовуючи другу важливу границю, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{3x+2} = \{1^\infty\} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right]^{\frac{2(3x+2)}{x+3}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{6x+4}{x+3}} = e^6.$$

Відповідь: e^6.

5. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = a$, якщо вона визначена в деякому околі точки a і

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Це означення містить три умови неперервності:

1) функція $y = f(x)$ повинна бути визначеною в деякому околі точки $x = a$ (включаючи саму точку a);
2) повинні існувати скінченні границі зліва $f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x)$ і справа $f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x)$;
3) повинна виконуватися умова $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$.

У тих точках, в яких не виконується хоча б одна з цих умов, функція має розрив. Розрізняють точки розриву першого та другого роду.

Якщо існують скінченні односторонні границі $f(a-0)$ і $f(a+0)$, причому не всі три числа $f(a-0)$, $f(a+0)$, $f(a)$ рівні між собою, то розрив у точці a називають ***розривом першого роду***, а точку $x = a$ – ***точкою розриву першого роду***. Зокрема, якщо $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, то розрив у точці a називається ***усувним***, а точка $x = a$ називається ***точкою усувного розриву***. У цьому випадку досить довизначити функцію лише в одній точці $x = a$, поклавши $f(a) = f(a \pm 0)$, щоб дістати функцію, неперервну в точці a. Величину

$$d = |f(a+0) - f(a-0)|$$

називають ***стрибком функції у точці*** $x = a$. Для усувного розриву $d = 0$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{n\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}=$$

$$=\frac{1}{(3+1)(\sqrt{3+6}+3)}=\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{24}.$$

Відповідь: $\frac{1}{24}$.

4. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана тригонометричними виразами.

Такі невизначеності найчастіше розкривають, використовуючи еквівалентність нескінченно малих величин.

<u>**Приклад 3.5.**</u> Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\sin 2x\cdot \operatorname{arctg} 6x}.$$

Розв'язання. При $x\to 0$ $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, $\sin 2x \sim 2x$, $\operatorname{arctg} 6x \sim 6x$. Замінюючи нескінченно малі величини еквівалентними їм величинами, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\sin 2x\cdot \operatorname{arctg} 6x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{2x\cdot 6x}=\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

5. Невизначеність виду 1^{∞} розкривають за допомогою формули:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \quad (e=2{,}718\ldots \text{ – ірраціональне число}),$$

яку називають ***другою важливою (чудовою) границею.***

<u>**Приклад 3.6.**</u> Обчислити границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{3x+2}.$$

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання хімічної промисловості збільшити вдвічі, паливної – в 2,5 рази, а металургії залишити без змін.

Розв'язання. Маємо

$$a_{11}=\frac{8}{98}\approx 0{,}08;\quad a_{12}=\frac{18}{132}\approx 0{,}14;\quad a_{13}=\frac{26}{104}\approx 0{,}25;$$

$$a_{21}=\frac{12}{98}\approx 0{,}12;\quad a_{22}=\frac{8}{132}\approx 0{,}06;\quad a_{23}=\frac{32}{104}\approx 0{,}3;$$

$$a_{31}=\frac{7}{98}\approx 0{,}07;\quad a_{32}=\frac{25}{132}\approx 0{,}19;\quad a_{33}=\frac{15}{104}\approx 0{,}14.$$

Матриця прямих затрат

$$A=\begin{pmatrix}0{,}08 & 0{,}14 & 0{,}25\\ 0{,}12 & 0{,}06 & 0{,}3\\ 0{,}07 & 0{,}19 & 0{,}14\end{pmatrix}$$

має невід'ємні елементи і задовольняє критерій продуктивності:

$$\max\{0{,}08+0{,}12+0{,}07;\ 0{,}14+0{,}06+0{,}19;\ 0{,}25+0{,}3+0{,}14\}=0{,}69<1.$$

Знайдемо матрицю повних затрат:

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}645}\begin{pmatrix}0{,}92 & 0{,}14 & 0{,}25\\ 0{,}12 & 0{,}94 & 0{,}3\\ 0{,}07 & 0{,}19 & 0{,}86\end{pmatrix}.$$

За формулою (1.11) знайдемо вектор валового випуску:

$$X=SY=\frac{1}{0{,}645}\begin{pmatrix}0{,}92 & 0{,}14 & 0{,}25\\ 0{,}12 & 0{,}94 & 0{,}3\\ 0{,}07 & 0{,}19 & 0{,}86\end{pmatrix}\begin{pmatrix}115\\ 80\\ 114\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}225{,}6\\ 191\\ 191{,}2\end{pmatrix}.$$

Отже, валовий випуск паливної промисловості треба збільшити до 225,6 ум. од., металургії – до 191 ум. од., хімічної промисловості – до 191,2 ум. од.

Задачі до теми 1

1. Нехай $A=\begin{pmatrix}2&1\\-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$. Знайти:

1) $3A-B$; 2) $(A+2B)^{\mathrm{T}}$; 3) $AB-BA$; 4) $AB-B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$; 5) A^3.

2. Знайти добуток матриць:

1) $\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&0&2\\-2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\\0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1&3\\-1&2&1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}-2&1&3\\-1&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\\0&-2\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}-1&3\\4&1\\5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\3&4\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&3\end{pmatrix}$.

3. Знайти матрицю $D=ABC^{\mathrm{T}}+2E$, де E – одинична матриця:

1) $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}4&1&2\\-1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\\0&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&2\\1&3\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

4. Обчислити визначники за правилом трикутників і розкладанням за елементами якого-небудь рядка або стовпця:

1) $\begin{vmatrix}2&1&3\\-1&-2&3\\0&1&2\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}3&1&-1\\5&2&0\\1&-2&2\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}3&-2&1\\1&2&4\\-2&3&-2\end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix}2&1&-3\\-3&4&-1\\5&2&1\end{vmatrix}$.

2. **Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана відношенням двох многочленів.**

Приклад 3.3. Обчислити границю

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x^2+x-2}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{x\to-2}(x^2-4)=0,\qquad \lim_{x\to-2}(x^2+x-2)=0,$$

то маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Щоб її розкрити, розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$x^2-4=(x+2)(x-2),\qquad x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$

Скорочуючи на $(x+2)$, маємо

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x^2+x-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to-2}\frac{x-2}{x-1}=\frac{-2-2}{-2-1}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

Множник $(x-a)$, через який чисельник і знаменник прямують до нуля, називають ***критичним множником.*** Отже, щоб розкрити невизначеність виду $\frac{0}{0}$, задану відношенням двох многочленів, треба скоротити дріб на критичний множник.

3. **Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами.**

Приклад 3.4. Обчислити границю

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3}.$$

Розв'язання. Для обчислення границі помножимо й поділимо дріб на вираз, спряжений з чисельником, а потім розкладемо на множники знаменник і чисельник і скоротимо на критичний множник:

1) невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ (відношення двох нескінченно великих величин);

2) невизначеність виду $\frac{0}{0}$ (відношення двох нескінченно малих величин);

3) невизначеність виду $0 \cdot \infty$ (добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику);

4) невизначеність виду $\infty - \infty$ (різниця двох нескінченно великих величин);

5) невизначеності виду 0^0, ∞^0, 1^∞.

Операцію обчислення границі у цих випадках називають ***розкриттям невизначеності.*** Розглянемо деякі способи розкриття невизначеності.

1. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів.

Такі невизначеності можна розкривати за правилом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases} \qquad (3.2)$$

<u>**Приклад 3.2.**</u> Обчислити границі

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x^2+7x-9}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{2x^2+7x-9}$; в) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4}{2x^2+7x-9}$.

Розв'язання. Користуючись правилом (3.2), легко знаходимо:

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x^2+7x-9} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 0$;

б) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{2x^2+7x-9} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{3}{2}$;

в) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4}{2x^2+7x-9} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \infty$.

Відповіді: а) 0; б) $\frac{3}{2}$; в) ∞.

5. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

6. Визначити ранг матриці:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Розв'язати системи рівнянь матричним методом:

1) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3, \\ 4x_1 + 5x_2 = 22; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 10, \\ 2x_1 - x_2 = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -6, \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 8. \end{cases}$

8. Розв'язати матричні рівняння:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -26 \\ 3 & -21 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 32 & 24 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 1 \\ -2 & 6 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 11x_2 = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 4, \\ 3x_1 - 7x_2 = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_2 + 3x_3 = -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 = -1. \end{cases}$

10. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 24; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$

11. Розв'язати системи рівнянь методом Жордана-Гаусса:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

функція $\beta(x)$ називається ***нескінченно великою величиною*** (***нескінченно великою функцією***) при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = \infty$$

(в цих означеннях a може дорівнювати ∞, $-\infty$, $+\infty$ або скінченому числу).

Нескінченно малі при $x \to a$ величини $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються ***еквівалентними*** при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Еквівалентність позначають так: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$. Можна довести, що при $x \to 0$

1. $\sin x \sim x$;
2. $\mathrm{tg}\, x \sim x$;
3. $\arcsin x \sim x$;
4. $\mathrm{arctg}\, x \sim x$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$;
6. $a^x - 1 \sim x \ln a$;
7. $e^x - 1 \sim x$;
8. $\log_a (1 + x) \sim \frac{x}{\ln a}$;
9. $\ln (1 + x) \sim x$;
10. $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad \alpha > 0$.

Перша з цих еквівалентностей означає, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(цю формулу називають ***першою важливою (чудовою) границею***).

4. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

У найпростіших випадках обчислення границі $\lim_{x \to a} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргумента, наприклад $\lim_{x \to \pi} \cos x = \cos \pi = -1$. Проте часто така підстановка приводить до невизначених виразів, зокрема, таких:

Число A називається границею функції $y = f(x)$ ***зліва*** (або ***лівою границею***) в точці a, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $a - \delta < x < a$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. При цьому пишуть

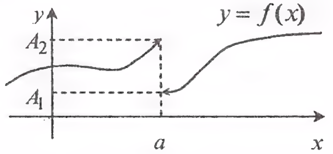
$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A.$$

Число A називається границею функції $y = f(x)$ ***справа*** (або ***правою границею***) в точці a, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $a < x < a + \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. При цьому пишуть

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) = A.$$

Для того, щоб число A було границею функції $y = f(x)$ при $x \to a$, необхідно й достатньо, щоб односторонні границі $f(a-0)$ і $f(a+0)$ існували й дорівнювали A.

Приклад 3.1



$$f(a-0) = A_2,$$
$$f(a+0) = A_1.$$

Властивості границь функцій аналогічні властивостям границь послідовностей.

3. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ І НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ВЕЛИЧИНИ

Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою величиною*** (***нескінченно малою функцією***) при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0;$$

Відповіді до задач теми 1

1. 1) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} -6 & 17 \\ -34 & 11 \end{pmatrix}$.

2. 1) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -7 & 8 & 9 \\ -2 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$; 3) (12); 4) $\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 11 & 11 \\ -5 & 8 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}$.

3. 1) $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 26 & 50 \\ 24 & 39 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 18 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 1) -15; 2) 14; 3) -29 4) 88.

5. 1) -14; 2) -24; 3) 8.

6. 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) 2; 5) 3; 6) 2; 7) 4.

7. 1) (3; 2); 2) (–2; 4); 3) (1; –2; 3); 4) (2; –1; 0); 5) (–1; 3; 2); 6) (0; 4; 5);
7) (–2; 0; 1); 8) (3; 3; 1).

8. 1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. 1) (3; –1); 2) (7; 2); 3) (3; 2; 0); 4) (–3; 1; –1); 5) (–3; 1; 2);
6) (–2; 1; 2).

10. 1) (1; 3; 2); 2) $\varnothing$; 3) $\left(-\frac{11x_3+1}{2};\ 7x_3+3;\ x_3\right)$; 4) $\left(\frac{-2x_3+17}{5};\ \frac{6x_3-1}{5};\ x_3\right)$;
5) $(2x_3 - x_4 + 6;\ -3x_3 - 2;\ x_3;\ x_4)$ 6) $(-3x_3 - 9x_4 - 8;\ -x_3 - 4x_4 - 3;\ x_3;\ x_4)$.

11. 1) $(4x_3 + 3x_4 - 4;\ -7x_3 - 5x_4 + 10;\ x_3;\ x_4)$; 2) (3; 2; 1; –1); 3) $\varnothing$;
4) $(11x_4 - 9;\ 5x_4 - 4;\ -8x_4 + 8;\ x_4)$.

Тема 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1. ВЕКТОРИ

Вектором називається напрямлений відрізок.

Вектори позначають символами $\vec{a}$ або $\overline{AB}$. При позначенні вектора двома літерами перша літера вказує точку початку вектора, а друга – точку його кінця. Напрям вектора на рисунку позначають стрілкою.

Відстань між початком вектора і його кінцем називають ***довжиною*** або ***модулем*** вектора і позначають $|\vec{a}|$ або $|\overline{AB}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним***.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається ***нульовим*** і позначається $\vec{0}$. Довжина нульового вектора дорівнює нулю, а напрям невизначений.

Вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Вектори називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні довжини.

Вектори називаються ***протилежними***, якщо вони колінеарні, протилежно напрямлені і мають рівні довжини.

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають через $-\vec{a}$.

Вектори називаються ***компланарними***, якщо вони лежать в одній площині або у паралельних площинах.

2. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі X точки a, крім, можливо, самої точки a.

Число A називають ***границею функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** a (або при $x \to a$), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність

$$0 < |x - a| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

При цьому пишуть

$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \qquad (3.1)$$

З геометричної точки зору запис (3.1) означає, що для всіх точок x, досить близьких до точки a, відповідні значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A.

У наведеному означенні границі функції числа a і A можуть бути нескінченними. Тоді пишуть

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \text{і т.д.}$$

Для кожного такого випадку наведене вище означення треба відповідним чином змінити. Наприклад,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty,$$

якщо для довільного числа $M > 0$ існує число $N = N(M) > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $f(x) > M$.

Наводити всіх таких означень не будемо.

До цього часу вважалося, що $x \to a$ довільним чином, набуваючи значень менших або більших від a. Проте в деяких випадках спосіб наближення x до a суттєво впливає на значення границі. Тому вводять поняття ***односторонніх границь***.

ε-околом точки a. Тому наведене означення границі можна сформулювати інакше, надавши йому геометричної наочності: число a називається ***границею числової послідовності*** $\{a_n\}$, якщо в довільний ε-окіл числа a попадають всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, який залежить від величини ε.

Якщо число a є границею послідовності $\{a_n\}$, то пишуть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad .$$

Послідовність, яка має границю, називається ***збіжною***. Послідовність, яка не має границі, називається ***розбіжною***.

Справедливі такі твердження:

1) числова послідовність не може мати більше ніж одну границю;
2) усяка монотонно зростаюча (спадна) і обмежена зверху (знизу) числова послідовність збіжна.

Кажуть, що послідовність $\{a_n\}$ прямує до нескінченності, якщо для довільного числа $M>0$ існує такий номер $N=N(M)$, що для всіх номерів $n>N$ виконується нерівність $|a_n|>M$. При цьому пишуть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad .$$

Властивості границь

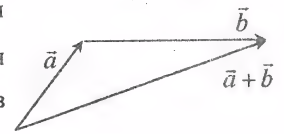
Якщо існують і скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то

1. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, де $c = const$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

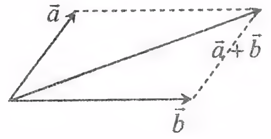
2. ЛІНІЙНІ ДІЇ З ВЕКТОРАМИ

До лінійних дій з векторами належать додавання і віднімання векторів, множення вектора на число.

1. ***Сумою*** векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{a}+\vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$. Це правило додавання векторів називають правилом трикутника.



Аналогічно, щоб побудувати суму кількох векторів, можна ці вектори розташувати так, щоб початок кожного наступного вектора збігався з кінцем попереднього. Тоді вектор, що сполучає початок першого вектора з кінцем останнього, буде сумою цих векторів.



Суму двох векторів можна знайти також за правилом паралелограма.

2. ***Різницею*** $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають суму вектора $\vec{a}$ і вектора $-\vec{b}$, протилежного вектору $\vec{b}$:

$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad .$$

3. ***Добутком*** вектора $\vec{a}\neq\vec{0}$ на число $\alpha\neq 0$ називається вектор $\alpha\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\alpha||\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний йому, якщо $\alpha<0$. Якщо $\vec{a}=\vec{0}$ або $\alpha=0$, то $\alpha\vec{a}=\vec{0}$.

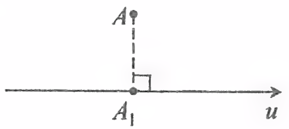
Властивості лінійних дій з векторами

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
3. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.
4. $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.
5. $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

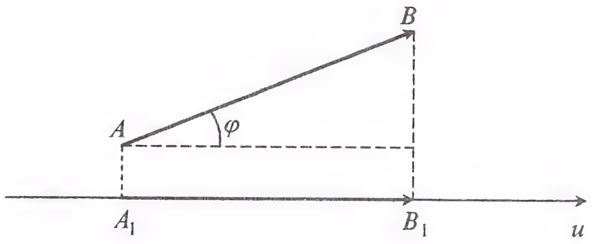
3. ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ

Числовою віссю називають пряму, на якій визначено напрям, початок відліку і одиницю масштабу.

Проекцією точки A на вісь u називається основа A_1 перпендикуляра AA_1, опущеного з точки A на дану вісь.



Нехай у просторі задано вектор $\overline{AB}$ і вісь u. Позначимо через A_1, B_1 проекції на вісь u точок A і B:



Проекцією вектора $\overline{AB}$ ***на вісь*** u називають довжину вектора $\overline{A_1B_1}$, узяту зі знаком "+", якщо напрям вектора $\overline{A_1B_1}$ збігається з напрямом осі u, та із знаком "–" у протилежному випадку.

Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь u позначають так: $\text{пр}_u\vec{a}$. Якщо $\vec{a}=\vec{0}$, то вважають, що $\text{пр}_u\vec{a}=0$.

Позначимо через φ кут між вектором $\overline{AB}$ і віссю u.

<u>**Властивості проекцій**</u>

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь u дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором і віссю, тобто

$$\text{пр}_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi .$$

2. Проекція суми векторів на одну вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь:

$$\text{пр}_u(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\text{пр}_u\vec{a}+\text{пр}_u\vec{b}+\text{пр}_u\vec{c}.$$

Тема 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Числовою послідовністю називається занумерована множина чисел, розташованих у порядку зростання їх номерів:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad \text{або} \qquad \{a_n\},\ n=1,2,3,\ldots .$$

Послідовність, що складається зі скінченної множини чисел, називається ***скінченною***, а послідовність, яка складається з нескінченної множини чисел, – ***нескінченною***. Ми будемо розглядати лише нескінченні послідовності.

Числова послідовність називається ***монотонно зростаючою (спадною)***, якщо кожний її член, починаючи з другого, більший (менший) від попереднього, тобто

$$a_{n+1}>a_n, \quad (a_{n+1}<a_n), \quad n=1,2,3,\ldots .$$

Числова послідовність називається ***обмеженою зверху***, якщо всі її члени менші від деякого числа M:

$$a_n<M, \quad n=1,2,3,\ldots .$$

Числова послідовність називається ***обмеженою знизу***, якщо всі її члени більші від деякого числа m:

$$m<a_n, \quad n=1,2,3,\ldots .$$

Числова послідовність називається ***обмеженою***, якщо вона обмежена і зверху, і знизу, тобто

$$m<a_n<M, \quad n=1,2,3,\ldots .$$

Число a називається ***границею числової послідовності*** $\{a_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує такий номер $N=N(\varepsilon)$, що для всіх номерів $n>N$ виконується нерівність

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

Остання нерівність еквівалентна подвійній нерівності

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon.$$

Це означає, що число a_n належить інтервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, який називається

12. 1) $a=-14$, $b=6$; 2) $a=2$.

13. $8/3$.

14. 1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}$; 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{4}$; 3) $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{0}$; 4) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-5}$; 5) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{4}$.

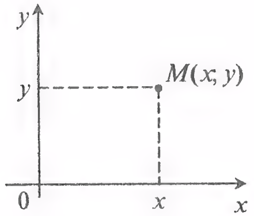
15. 1) Коло, $C(-2;3)$, $R=2$; 2) рівняння не визначає геометричного образу; 3) точка $(-1;0)$; 4) прямі $x=0$, $x+2y+4=0$; 5) еліпс, $C(0;0)$, $a=3$, $b=2$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$; 6) еліпс, $C(1;-1)$, $a=2$, $b=1$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) гіпербола, $C(0;0)$, $a=5$, $b=3$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{34}}{5}$, $y=\pm\frac{3}{5}x$; 8) гіпербола, $C(-1;0)$, $a=2$, $b=1$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $y=\pm\frac{1}{2}x$; 9) парабола, $A(-1;2)$, $p=1$, $x=-1{,}5$; 10) парабола, $A(-3;-1)$, $p=3$, $x=-1{,}5$.

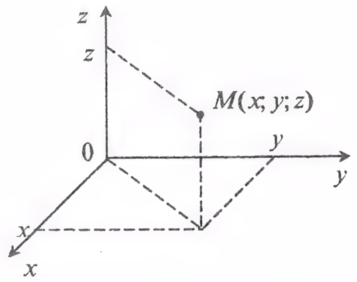
3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число α його проекція також множиться на це число:

$$\text{пр}_u(\alpha\,\vec{a})=\alpha\ \text{пр}_u\vec{a}.$$

4. КООРДИНАТИ ВЕКТОРІВ

Дві або три взаємно перпендикулярні числові осі зі спільним початком відліку називають прямокутною декартовою системою координат на площині або у просторі.





Проекції x, y, z точки M на осі координат називають ***координатами точки*** M.

Проекції a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ на осі Ox, Oy, Oz називають ***координатами вектора*** $\vec{a}$. При цьому пишуть

$$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z).$$

З першої властивості проекцій випливає, що якщо вектор $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ утворює з осями координат кути α, β, γ, то

$$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha,\ a_y=|\vec{a}|\cos\beta,\ a_z=|\vec{a}|\cos\gamma$$

або

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Косинуси кутів α, β, γ називають ***напрямними косинусами вектора*** $\vec{a}$.

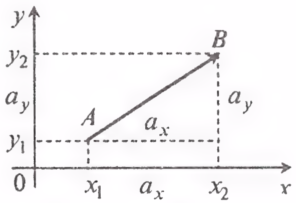
З другої і третьої властивостей проекцій випливає, що якщо $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, то

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z),$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z).$$

Розглянемо вектор $\vec{a} = \overline{AB}$, де $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. З рисунка видно, що

$a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$,



$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} .$$

Для простору останні формули можна узагальнити так:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Отже, щоб знайти координати вектора, треба від координат його кінця відняти відповідні координати його початку.

Зауважимо, що рівні вектори мають рівні координати.

Умова колінеарності векторів

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то можна вважати, що вони лежать на одній прямій, отже існує таке число α, що $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, тобто $a_x = \alpha b_x$, $a_y = \alpha b_y$, $a_z = \alpha b_z$. Звідси випливає, що

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Отже, вектори колінеарні тоді і лише тоді, коли їх координати пропорційні.

5. ПОНЯТТЯ ПРО n-ВИМІРНИЙ ПРОСТІР

До цього часу вектори розглядалися лише з геометричної точки зору як напрямлені відрізки на площині або у просторі. Проте часто, зокрема в економічних дослідженнях, буває потрібним інший підхід до векторів як до упорядкованої множини чисел.

Так, в одновимірному просторі R_1, тобто на числовій осі, кожному

3) $2x^2 + y^2 + 4x + 2 = 0$; 4) $x^2 + 2xy + 4x = 0$;

5) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$; 6) $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$;

7) $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$; 8) $x^2 - 4y^2 + 2x - 3 = 0$;

9) $y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$; 10) $y^2 + 6x + 2y + 19 = 0$.

Відповіді до задач теми 2

1. 1) ± 3; 2) ± 12.

2. 1) $\sqrt{305}$; 2) $9\sqrt{5}$.

3. 1) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{4}{5}$; 2) $\cos\alpha = \frac{4}{13}$, $\cos\beta = \frac{3}{13}$, $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.

4. 1) $\frac{\pi}{4}$, $2\sqrt{2}$; 2) arccos0,36, $\frac{157\sqrt{89}}{89}$.

5. 1) (2; −4; −2); 2) (3; 0; 1); 3) (0; 2; 1).

6. 1) (2; −1); 2) (2; −3; 1); 3) (−1; 2; −2).

7. 1) $3x + 4y - 13 = 0$; 2) $x + 2y - 5 = 0$; 3) $2x + 3y + 1 = 0$; 4) $x + 7y + 5 = 0$, $7x - y - 15 = 0$.

8. 1) $-\frac{17}{3}$; 2) 8; 3) −6.

9. $Q(4; 1)$.

10. $4x - 3y + 15 = 0$, $5x + y + 2 = 0$, 5, $\frac{17\sqrt{26}}{13}$, $\operatorname{arctg}\frac{17}{7}$.

11. 1) $x - 2y + 3z + 7 = 0$; 2) $z - 1 = 0$; 3) $x + 2y - 5z + 1 = 0$.

11. Скласти рівняння площини, яка:

1) проходить через точку $M_0(2;\ 3;\ -1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(1;\ -2;\ 3)$;

2) проходить через точку $M_0(-2;\ 4;\ 1)$ паралельно площині xOy;

3) проходить через точки $M_1(0;\ 2;\ 1)$, $M_2(1;\ -1;\ 0)$, $M_3(2;\ 1;\ 1)$.

12. Визначити, за яких значень a і b площини

1) $ax+2y-bz+5=0$ і $7x-y+3z-2=0$ паралельні;

2) $2x+ay-3z+2=0$ і $2x+y+2z+5=0$ перпендикулярні.

13. Знайти відстань між паралельними площинами

$$2x-y+2z+1=0 \quad \text{і} \quad 2x-y+2z+9=0.$$

14. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;\ -2;\ 3)$ паралельно:

1) вектору $\vec{s}=(3;\ 2;\ -1)$;

2) прямій $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$;

3) осі Oy;

4) прямій $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-3+2t, \\ z=5-5t; \end{cases}$

5) прямій, що проходить через точки $M_1(2;\ 1;\ 1)$ і $M_2(3;\ 3;\ 5)$.

15. Визначити, який геометричний образ визначає кожне рівняння. Для кола знайти центр C і радіус R; для еліпса – центр C, півосі, ексцентриситет; для гіперболи – центр C, півосі, ексцентриситет, рівняння асимптот; для параболи – вершину A, параметр p, рівняння директриси. Зробити рисунок у декартовій прямокутній системі координат:

1) $x^2+y^2+4x-6y+9=0$; 2) $x^2+y^2-8x+20=0$;

вектору ставиться у відповідність одне число – координата вектора.

У двовимірному просторі R_2 (на площині) кожному вектору ставиться у відповідність упорядкована пара чисел (його координати), а у тривимірному просторі R_3 – упорядкована трійка чисел.

Узагальнюючи простори R_1, R_2, R_3, приходимо до n-вимірного простору R_n, де n – довільне натуральне число.

Упорядкована множина n дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається ***n*-вимірним вектором** і позначається $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Два n-вимірні вектори вважаються рівними тоді і лише тоді, коли рівні їх координати.

Якщо $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots a_n)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, \ldots b_n)$, то

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n),$$

$$\alpha\vec{a}=(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n),$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+\ldots+a_nb_n.$$

Множина всіх n-вимірних векторів називається ***n*-вимірним простором** і позначається через R_n.

Простори R_1, R_2, R_3 є окремими випадками простору R_n. Їх можна зображати геометрично. Для $n>3$ простори R_n геометрично уявити вже не можна, проте вони широко використовуються в економіці. Так, наприклад, деякий набір товарів можна охарактеризувати вектором $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots a_n)$, а відповідні ціни – вектором $\vec{b}=(b_1, b_2, \ldots b_n)$. Тоді загальна ціна всіх товарів дорівнює

$$p=\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+\ldots+a_nb_n.$$

6. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ЗА БАЗИСОМ

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ з дійсними коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ називається вектор

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_m\bar{a}_m.$$

Якщо вектор записаний у вигляді лінійної комбінації деяких векторів, то кажуть, що він розкладений за цими векторами.

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ називаються ***лінійно залежними***, якщо рівність

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_m\bar{a}_m = 0$$

можлива за умови $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2 \neq 0$. Якщо ж ця рівність можлива лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то вектори називаються ***лінійно незалежними.***

Зазначимо без доведення, що максимальне число лінійно незалежних n-вимірних векторів дорівнює n, причому n n-вимірних векторів будуть лінійно незалежними тоді і лише тоді, коли матриця, складена з координат цих векторів, невироджена.

Базисом n-вимірного простору R_n називають будь-яку сукупність n лінійно незалежних n-вимірних векторів.

Якщо вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ утворюють базис в R_n, то будь-який інший n-вимірний вектор $\bar{b}$ можна розкласти за цим базисом, тобто записати у вигляді

$$\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n \quad .$$

При цьому числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називаються координатами вектора $\bar{b}$ у цьому базисі.

Приклад 2.1. Довести, що вектори $\bar{a}_1 = (2; 1; 0)$, $\bar{a}_2 = (1; -1; 2)$, $\bar{a}_3 = (2; 2; -1)$ утворюють базис, та знайти координати вектора $\bar{b} = (3; 7; -7)$ у цьому базисі.

Розв'язання. Оскільки матриця, складена з координат цих векторів

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

має визначник

$$\Delta = |A| = 2 + 4 + 0 - 0 + 1 - 8 = -1 \neq 0,$$

2) перпендикулярний до векторів $\bar{a} = (1; 2; -3)$, $\bar{b} = (2; 1; -6)$ та задовольняє умову $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 5$;

3) задовольняє умови $\bar{x} \cdot (2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}) = 1$, $\bar{x} \cdot (3\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) = 3$ і перпендикулярний до осі Ox.

6. Довести, що вектори $\bar{a}_i$ утворюють базис, та знайти координати вектора $\bar{b}$ у цьому базисі.

1) $\bar{a}_1 = (2;\ -1)$, $\bar{a}_2 = (3;\ 2)$, $\bar{b} = (1;\ -4)$.

2) $\bar{a}_1 = (1;\ 2;\ 3)$, $\bar{a}_2 = (2;\ 2;\ 1)$, $\bar{a}_3 = (-3;\ 2;\ -1)$, $\bar{b} = (-7;\ 0;\ 2)$.

3) $\bar{a}_1 = (3;\ -1;\ 1)$, $\bar{a}_2 = (-1;\ 1;\ -2)$, $\bar{a}_3 = (1;\ 2;\ -3)$, $\bar{b} = (-7;\ -1;\ 1)$.

7. Скласти рівняння прямої, яка проходить:

1) через дві точки $A(3; 1)$ і $B(-1; 4)$;

2) через точку $A(7; -1)$ паралельно прямій $x + 2y + 2 = 0$;

3) через точку $A(-2; 1)$ перпендикулярно до прямої $3x - 2y + 4 = 0$;

4) через точку $A(2; -1)$ під кутом $45°$ до прямої $4x + 3y + 1 = 0$.

8. Знайти значення параметра a, при якому:

1) точка $A(4; -3)$ лежить на прямій $3x - ay + 5 = 0$;

2) прямі $ax + 2y - 2 = 0$ і $4x + y = 0$ паралельні;

3) прямі $2x - ay + 3 = 0$ і $3x - y + 2 = 0$ перпендикулярні.

9. Знайти точку Q, симетричну до точки $P(2; 5)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(1; 2)$ і $B(5; 4)$.

10. Дано вершини трикутника $A(-3; 1)$, $B(-2; 8)$ і $C(2; 2)$. Знайти рівняння медіани AMі висоти BD, довжину AM і BD, кут при вершині C. Зробити рисунок в декартовій прямокутній системі координат.

Зауваження. Якщо лінія другого порядку описується рівнянням $F(x;\ y)=0$ і має центр або вершину в точці $O(0;0)$, то лінія $F(x-x_0; y-y_0)=0$ матиме центр або вершину в точці $(x_0; y_0)$.

Задачі до теми 2

1. Дано дві координати a_x, a_y вектора $\vec{a}=(a_x;\ \ a_y;\ \ a_z)$ і його модуль $|\vec{a}|$. Знайти його третю координату a_z.

1) $a_x=-4,\quad a_y=12,\quad |\vec{a}|=13.$ 2) $a_x=16,\quad a_y=15,\quad |\vec{a}|=25.$

2. Дано вектори $\vec{a}=(2;-4;6)$ і $\vec{b}=(1;2;-2)$. Знайти модуль вектора $\vec{c}$.

1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$. 2) $\vec{c}=3\vec{a}+\vec{b}$.

3. Дано координати трьох вершин паралелограма *ABCD*. Обчислити напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{BD}$.

1) $A(3;-1), B(2;2), C(-2;1)$. 2) $A(3;3;9), B(1;2;3), C(3;4;9)$.

4. Дано три точки *A*, *B*, *C*. Знайти кут φ між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ і проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.

1) $A(1;2), B(3;4), C(5;2),\quad \vec{a}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2) $A(-1;-2;1), B(2;2;1), C(5;-2;9),\quad \vec{a}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

5. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо він:

1) колінеарний вектору $\vec{a}=(-1;2;1)$, має довжину $2\sqrt{6}$ і утворює з віссю *Oz* тупий кут;

то вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ лінійно незалежні, а значить утворюють базис в R_3.

Вектор $\vec{b}$ також належить R_3. Тому його можна записати у вигляді

$$\vec{b}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3.$$

Користуючись тим, що рівні вектори мають рівні відповідні координати, розпишемо цю векторну рівність покоординатно у вигляді системи:

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=3,\\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=7,\\ 2\alpha_2-\alpha_3=-7.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за правилом Крамера.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&1&2\\7&-1&2\\-7&2&-1\end{vmatrix}=3-14+28-14+7-12=-2,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&3&2\\1&7&2\\0&-7&-1\end{vmatrix}=-14+0-14-0+3+28=3,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-1&7\\0&2&-7\end{vmatrix}=14+0+6-0+7-28=-1,$$

$$\alpha_1=\frac{-2}{-1}=2,\qquad \alpha_2=\frac{3}{-1}=-3,\qquad \alpha_3=\frac{-1}{-1}=1.$$

Отже, розклад вектора $\vec{b}$ за базисом $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ такий:

$$\vec{b}=2\vec{a}_1-3\vec{a}_2+\vec{a}_3,$$

причому у цьому базисі вектор $\vec{b}$ має координати $(2;\ \ -3;\ \ 1)$.

Відповідь: $(2;\ \ -3;\ \ 1)$.

Найпростіший базис тривимірного простору такий:

$$\vec{i}=(1,0,0),\quad \vec{j}=(0,1,0),\quad \vec{k}=(0,0,1).$$

Наприклад, вектор $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ можна розкласти так:

Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \frac{(-3)\cdot 4+(-3)\cdot(-4)+6\cdot 8}{3\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{6}} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3},$$

$$\varphi = \arccos\frac{2}{3} \approx 48{,}2^\circ.$$

в) Знайдемо координати вектора $\vec{a} = 3\overline{AB} - 2\overline{AC}$, а також координати та модуль вектора $\overline{BC}$.

$$\vec{a} = 3\cdot(-3,-3,6) - 2\cdot(4,-4,8) = (-9,-9,18)+(-8,\ 8,-16) = (-17,-1,2).$$

$$\overline{BC} = (5+2,-1-0,4-2) = (7,-1,2), \qquad \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{7^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Тоді

$$[illegible]_{\overline{BC}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{[illegible]}{3\sqrt{6}} = \frac{[illegible]}{3\sqrt{6}} = -\frac{[illegible]}{\sqrt{6}} = -\frac{[illegible]\sqrt{[illegible]}}{[illegible]}$$

Відповідь: а) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\approx 48{,}2^\circ$; в) $-\frac{19\sqrt{6}}{3}$.

<u>**Приклад 2.3.**</u> Знайти вектор $\bar{x}$, якщо він перпендикулярний до вектора $\bar{a} = (2;-1;4)$ і до осі Oy, утворює гострий кут із віссю Ox, і $|\bar{x}| = \sqrt{5}$.

Розв'язання. Нехай $\bar{x} = (x;y;z)$. Оскільки вектор $\bar{x}$ перпендикулярний до осі Oy, то $y=0$. Вектор $\bar{x}$ буде утворювати гострий кут із віссю Ox тоді і лише тоді, коли $x>0$. Крім того,

$$\bar{x}\perp\bar{a} \quad\Leftrightarrow\quad 2x-y+4z=0,$$

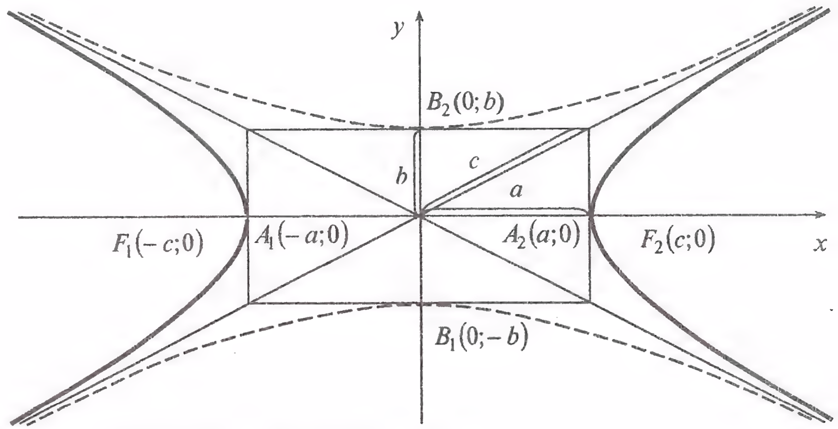
$$|\bar{x}| = \sqrt{5} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+z^2=5.$$

Таким чином, маємо систему:

$$\begin{cases} 2x+4z=0, \\ x^2+z^2=5, \\ x>0, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знайдемо $x=2$, $z=-1$.

Відповідь: $\bar{x} = (2;0;-1)$.



де $b^2 = c^2 - a^2$. Ця гіпербола має такий вигляд:

Прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$, показаний на рисунку, називається ***основним прямокутником гіперболи.***

Точки $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$ називаються ***вершинами гіперболи.*** Відрізок A_1A_2 і його довжину $2a$ називають ***дійсною віссю гіперболи***, а відрізок B_1B_2 і його довжину $2b$ – ***уявною віссю.*** Величини a і b називають відповідно ***дійсною*** й ***уявною півосями гіперболи.***

Прямі $y = \frac{b}{a}x$ і $y = -\frac{b}{a}x$, які проходять через вершини основного прямокутника, називаються ***асимптотами гіперболи.*** Точка $O(0;0)$, в якій перетинаються асимптоти, називається ***центром гіперболи.***

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ називається ***ексцентриситетом гіперболи.***

Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ називається ***спряженою*** з гіперболою (2.17) (на рисунку вона показана пунктиром).

<u>**Приклад 2.10.**</u> Встановити, що рівняння

$$x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 4 = 0$$

визначає гіперболу, знайти її центр C, півосі, ексцентриситет, рівняння асимптот. Зробити рисунок у декартовій прямокутній системі координат.

Зауваження. Якщо лінія другого порядку описується рівнянням $F(x;\ y)=0$ і має центр або вершину в точці $O(0;0)$, то лінія $F(x-x_0;y-y_0)=0$ матиме центр або вершину в точці $(x_0;y_0)$.

Задачі до теми 2

1. Дано дві координати a_x, a_y вектора $\vec{a}=(a_x;\ \ a_y;\ \ a_z)$ і його модуль $|\vec{a}|$. Знайти його третю координату a_z.

1) $a_x=-4,\quad a_y=12,\quad |\vec{a}|=13.$ 2) $a_x=16,\quad a_y=15,\quad |\vec{a}|=25.$

2. Дано вектори $\vec{a}=(2;-4;6)$ і $\vec{b}=(1;2;-2)$. Знайти модуль вектора $\vec{c}$.

1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$. 2) $\vec{c}=3\vec{a}+\vec{b}$.

3. Дано координати трьох вершин паралелограма *ABCD*. Обчислити напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{BD}$.

1) $A(3;-1), B(2;2), C(-2;1)$. 2) $A(3;3;9), B(1;2;3), C(3;4;9)$.

4. Дано три точки *A*, *B*, *C*. Знайти кут φ між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ і проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.

1) $A(1;2), B(3;4), C(5;2),\quad \vec{a}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2) $A(-1;-2;1), B(2;2;1), C(5;-2;9),\quad \vec{a}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

5. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо він:

1) колінеарний вектору $\vec{a}=(-1;2;1)$, має довжину $2\sqrt{6}$ і утворює з віссю Oz тупий кут;

то вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ лінійно незалежні, а значить утворюють базис в R_3.

Вектор $\vec{b}$ також належить R_3. Тому його можна записати у вигляді

$$\vec{b}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3.$$

Користуючись тим, що рівні вектори мають рівні відповідні координати, розпишемо цю векторну рівність покоординатно у вигляді системи:

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=3,\\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=7,\\ 2\alpha_2-\alpha_3=-7.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за правилом Крамера.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&1&2\\7&-1&2\\-7&2&-1\end{vmatrix}=3-14+28-14+7-12=-2,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&3&2\\1&7&2\\0&-7&-1\end{vmatrix}=-14+0-14-0+3+28=3,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-1&7\\0&2&-7\end{vmatrix}=14+0+6-0+7-28=-1,$$

$$\alpha_1=\frac{-2}{-1}=2,\qquad \alpha_2=\frac{3}{-1}=-3,\qquad \alpha_3=\frac{-1}{-1}=1.$$

Отже, розклад вектора $\vec{b}$ за базисом $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ такий:

$$\vec{b}=2\vec{a}_1-3\vec{a}_2+\vec{a}_3,$$

причому у цьому базисі вектор $\vec{b}$ має координати $(2;\ \ -3;\ \ 1)$.

Відповідь: $(2;\ \ -3;\ \ 1)$.

Найпростіший базис тривимірного простору такий:

$$\vec{i}=(1,0,0),\quad \vec{j}=(0,1,0),\quad \vec{k}=(0,0,1).$$

Наприклад, вектор $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ можна розкласти так:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Доведемо це:

$$a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x(1, 0, 0) + a_y(0, 1, 0) + a_z(0, 0, 1) = (a_x, a_y, a_z) = \vec{a}.$$

7. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута φ між ними, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\varphi .$$

Алгебраїчні властивості скалярного добутку векторів

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
3. $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Геометричні властивості скалярного добутку векторів

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (умова перпендикулярності двох векторів).
2. $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.
3. $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.
4. $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.
5. $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}$.

Теорема 2.1. ***Якщо*** $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, ***то***

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

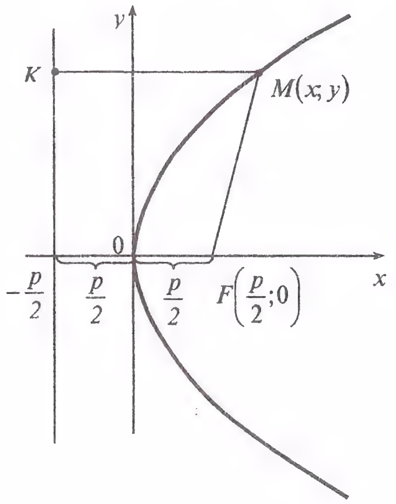
Доведення. Розкладемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ за векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

Парабола

Параболою називається геометричне місце точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки (фокуса) і від даної прямої (директриси).

Фокус параболи позначають буквою F, а відстань від фокуса до директриси – буквою p. Число p називають ***параметром параболи***.

Виведемо рівняння параболи, розташованої так, як на рисунку.



Точка K має координати $\left(-\frac{p}{2};\ y\right)$. Точка $M(x;y)$ лежатиме на параболі тоді і лише тоді, коли $FM = MK$, або

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2},$$

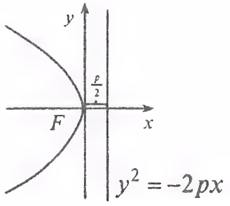
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

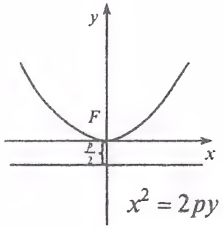
звідки

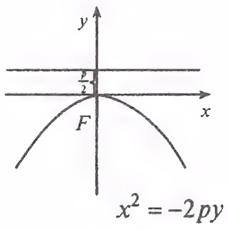
$$y^2 = 2px. \qquad (2.18)$$

Рівняння (2.18) називають ***канонічним рівнянням параболи***.

Парабола має одну вісь симетрії, яку називають ***віссю параболи***. Парабола перетинає свою вісь в єдиній точці, яку називають ***вершиною параболи***. Дамо зображення інших парабол:







Розв'язання. Виділяючи повні квадрати за змінними x та y, одержимо

$$(x^2+4x+4)-4-4(y^2+2y+1)+4-4=0,$$

$$(x+2)^2-4(y+1)^2=4,$$

$$\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{1}=1.$$

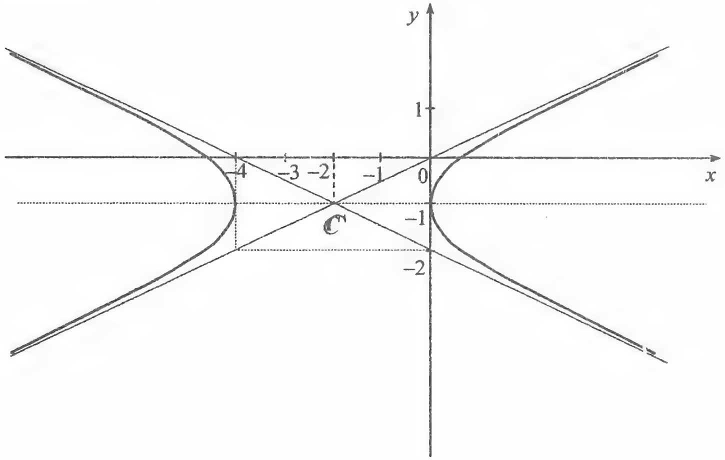
Це рівняння визначає гіперболу, центр якої знаходиться у точці $C(-2;-1)$. Півосі гіперболи: $a=2$, $b=1$. Ексцентриситет дорівнює

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{4+1}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Рівняння асимптот: $y+1=\pm\frac{b}{a}(x+2)$, $y+2=\pm\frac{1}{2}(x+2)$ або

$$x-2y=0 \quad \text{і} \quad x+2y+4=0.$$

Зробимо рисунок.



Відповідь: $C(-2;-1)$, $a=2$, $b=1$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x-2y=0$, $x+2y+4=0$.

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, \qquad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ колінеарні відповідно координатним осям Ox, Oy, Oz. Тому вони попарно перпендикулярні і згідно з умовою перпендикулярності векторів $\vec{i}\,\vec{j}=\vec{i}\,\vec{k}=\vec{j}\,\vec{k}=0$. Оскільки модулі векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ дорівнюють 1, то згідно з четвертою алгебраїчною властивістю векторів $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$. Враховуючи це, маємо:

$$\vec{a}\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x\vec{i}^{\,2}+a_xb_y\vec{i}\,\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\,\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\,\vec{i}+a_yb_y\vec{j}^{\,2}+a_yb_z\vec{j}\,\vec{k}+$$

$$+a_zb_x\vec{k}\,\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\,\vec{j}+a_zb_z\vec{k}^{\,2}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Теорему доведено.

Приклад 2.2. Дано три точки $A(1;3;-4)$, $B(-2;0;2)$, $C(5;-1;4)$. Знайти: а) напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$; б) кут φ між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$; в) проекцію вектора $\vec{a}=3\overline{AB}-2\overline{AC}$ на вектор $\overline{BC}$.

Розв'язання

а) Знайдемо координати й модуль вектора $\overline{AB}$.

$$\overline{AB}=((-2)-1,0-3,2+4)=(-3,-3,6),$$

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}.$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Тоді

$$\cos\alpha=\frac{-3}{3\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}, \qquad \cos\beta=\frac{-3}{3\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}, \qquad \cos\gamma=\frac{6}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

б) Обчислимо координати й модуль вектора $\overline{AC}$:

$$\overline{AC}=(5-1,-1-3,4+4)=(4,-4,8), \qquad \left|\overline{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-4)^2+8^2}=4\sqrt{6}.$$

Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \frac{(-3)\cdot 4+(-3)\cdot(-4)+6\cdot 8}{3\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{6}} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3},$$

$$\varphi = \arccos\frac{2}{3} \approx 48,2^{\circ}.$$

в) Знайдемо координати вектора $\vec{a} = 3\overline{AB} - 2\overline{AC}$, а також координати та модуль вектора $\overline{BC}$.

$$\vec{a} = 3\cdot(-3,-3,6) - 2\cdot(4,-4,8) = (-9,-9,18) + (-8,\ 8,-16) = (-17,-1,2).$$

$$\overline{BC} = (5+2,-1-0,4-2) = (7,-1,2), \qquad \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{7^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Тоді

$$[illegible]_{\overline{BC}}\ \vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{[illegible]}{3\sqrt{6}} = \frac{[illegible]}{3\sqrt{6}} = -\frac{[illegible]}{\sqrt{6}} = -\frac{[illegible]\sqrt{[illegible]}}{[illegible]}$$

Відповідь: а) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\approx 48,2^{\circ}$; в) $-\frac{19\sqrt{6}}{3}$.

<u>**Приклад 2.3.**</u> Знайти вектор $\bar{x}$, якщо він перпендикулярний до вектора $\vec{a} = (2;-1;4)$ і до осі Oy, утворює гострий кут із віссю Ox, і $|\bar{x}| = \sqrt{5}$.

Розв'язання. Нехай $\bar{x} = (x;\ y;\ z)$. Оскільки вектор $\bar{x}$ перпендикулярний до осі Oy, то $y = 0$. Вектор $\bar{x}$ буде утворювати гострий кут із віссю Ox тоді і лише тоді, коли $x > 0$. Крім того,

$$\bar{x} \perp \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y + 4z = 0,$$

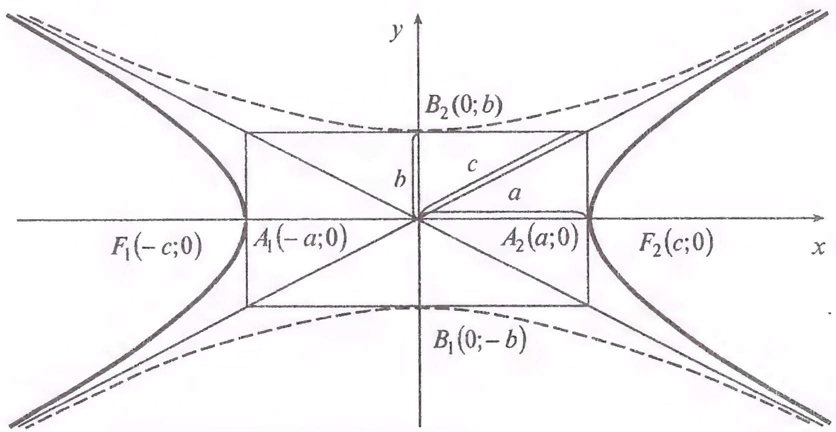
$$|\bar{x}| = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 5.$$

Таким чином, маємо систему:

$$\begin{cases} 2x + 4z = 0, \\ x^2 + z^2 = 5, \\ x > 0, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знайдемо $x = 2$, $z = -1$.

Відповідь: $\bar{x} = (2;0;-1)$.



де $b^2 = c^2 - a^2$. Ця гіпербола має такий вигляд:

Прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$, показаний на рисунку, називається ***основним прямокутником гіперболи.***

Точки $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$ називаються ***вершинами гіперболи.*** Відрізок A_1A_2 і його довжину $2a$ називають ***дійсною віссю гіперболи***, а відрізок B_1B_2 і його довжину $2b$ – ***уявною віссю.*** Величини a і b називають відповідно ***дійсною*** й ***уявною півосями гіперболи.***

Прямі $y = \frac{b}{a}x$ і $y = -\frac{b}{a}x$, які проходять через вершини основного прямокутника, називаються ***асимптотами гіперболи.*** Точка $O(0;0)$, в якій перетинаються асимптоти, називається ***центром гіперболи.***

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ називається ***ексцентриситетом гіперболи.***

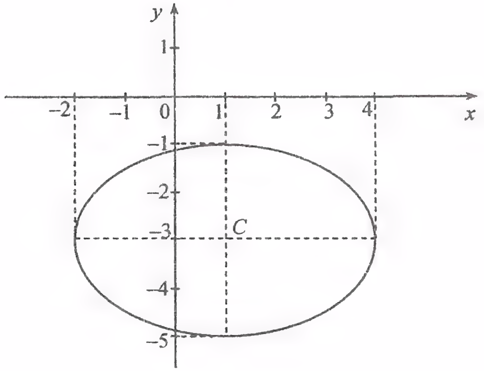
Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ називається ***спряженою*** з гіперболою (2.17) (на рисунку вона показана пунктиром).

<u>**Приклад 2.10**</u>. Встановити, що рівняння

$$x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 4 = 0$$

визначає гіперболу, знайти її центр C, півосі, ексцентриситет, рівняння асимптот. Зробити рисунок у декартовій прямокутній системі координат.

Зробимо рисунок у декартовій прямокутній системі координат.



Відповідь: $C(1;-3)$, $a=3$, $b=2$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

<u>Гіпербола</u>

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок (фокусів) є величина стала, менша від відстані між фокусами.

Нехай фокуси гіперболи F_1 і F_2 розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат. Відстань між фокусами F_1F_2 позначимо через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи $M(x;y)$ до фокусів позначимо через $2a$. За означенням $a<c$. Точка $M(x;y)$ лежить на гіперболі тоді і лише тоді, коли $|F_1M-F_2M|=2a$ або

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

Спрощуючи це рівняння аналогічно тому, як це робили для еліпса, дістанемо ***канонічне рівняння гіперболи:***

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2.17)$$

8. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Векторним добутком вектора $\vec a$ на вектор $\vec b$ називається вектор $\vec c=\vec a\times\vec b$, який визначається трьома умовами:

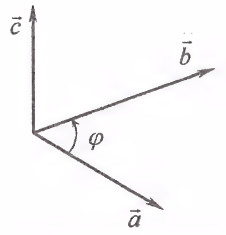
1) модуль вектора $\vec c$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec a$ і $\vec b$, віднесених до спільного початку, тобто

$$|\vec c|=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\varphi, \quad \text{де} \quad \varphi=(\widehat{\vec a,\vec b}) \text{ – кут між векторами } \vec a \text{ і } \vec b;$$

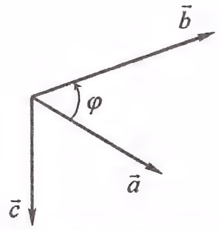
2) вектор $\vec c$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec a$ і $\vec b$;

3) якщо $\vec c\neq 0$, то вектори $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ утворюють праву трійку векторів.

Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ називається ***правою,*** якщо з кінця вектора $\vec c$ найкоротший перехід від вектора $\vec a$ до вектора $\vec b$



Права трійка векторів.



Ліва трійка векторів.

видно проти годинникової стрілки; у протилежному випадку трійка векторів $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ називається ***лівою.***

Векторний добуток векторів позначають ще й так: $[\vec a\vec b]$.

Властивості векторного добутку векторів

1. $\vec a\parallel\vec b \Leftrightarrow \vec a\times\vec b=0$ (умова паралельності двох векторів).
2. $\vec a\times\vec b=-\vec b\times\vec a$.
3. $\lambda\vec a\times\vec b=\vec a\times\lambda\vec b=\lambda(\vec a\times\vec b)$.
4. $(\vec a+\vec b)\times\vec c=\vec a\times\vec c+\vec b\times\vec c$.

Теорема 2.2. ***Якщо*** $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, ***то***

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Доведення. Розкладемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ за векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, \qquad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

Враховуючи співвідношення

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0,\quad \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},$$

$$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},$$

маємо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+$$

$$+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{i}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Теорему доведено.

Приклад 2.4. Знайти площу трикутника з вершинами в точках $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$.

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Оскільки

$$\overline{AB}=(2;-2;-3),\qquad \overline{AC}=(4;0;6),\qquad \overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k},$$

Еліпс, який визначається рівнянням (2.16), симетричний відносно осей Ox, Oy, а також відносно точки $O(0;0)$, яку називають ***центром еліпса.*** Еліпс перетинає осі координат у точках $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$, $B_2(0;\ b)$. Ці точки називають ***вершинами еліпса.***

Величини $A_1A_2=2a$ й $B_1B_2=2b$ називають відповідно ***великою*** та ***малою осями еліпса***, а числа a і b – ***великою*** й ***малою півосями еліпса.***

Величину $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ називають ***ексцентриситетом*** еліпса. Оскільки $0\le c<a$, то $0\le\varepsilon<1$. Ексцентриситет характеризує відхилення еліпса від кола. Якщо $\varepsilon=0$, то $a=b$ і еліпс перетворюється у коло. Якщо ε наближається до одиниці, то еліпс усе більше розтягується вздовж осі Ox.

Приклад 2.9. Встановити, що рівняння

$$4x^2+9y^2-8x+54y+49=0$$

визначає еліпс, і знайти його центр C, півосі, ексцентриситет. Зробити рисунок у декартовій прямокутній системі координат.

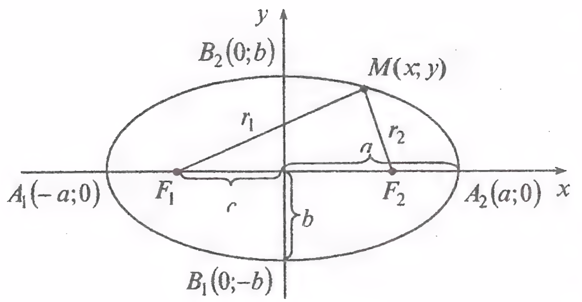
Розв'язання. Виділяючи за змінними x та y повні квадрати, дістанемо

$$4(x^2-2x+1)-4+9(y^2+6y+9)-81+49=0,$$

$$4(x-1)^2+9(y+3)^2=36,$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1.$$

Це рівняння визначає еліпс, центр якого знаходиться у точці $C(1;-3)$. Півосі еліпса дорівнюють $a=3$, $b=2$. Оскільки $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$, то ексцентриситет еліпса дорівнює $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.



Відстань F_1F_2 між фокусами позначимо через $2c$. Тоді точки F_1 і F_2 матимуть координати $(-c;\ 0)$ і $(c;0)$. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка еліпса. Тоді

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

де r_1, r_2 – фокальні радіуси точки M. За означенням еліпса $r_1 + r_2 = 2a$ або

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Далі будемо спрощувати це рівняння:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2),$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

Оскільки $a > c$, то величина $a^2 - c^2$ додатна. Позначимо її через b^2. Тоді одержимо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2.16)$$

де $b^2 = a^2 - c^2$. Рівняння (2.16) називається ***канонічним рівнянням еліпса.***

то

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 14.$$

Відповідь: 14 кв. од.

9. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ (векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ множиться скалярно на вектор $\vec{c}$).

Властивості векторного добутку векторів

1. При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

2. У мішаному добутку знаки векторного й скалярного добутків можна міняти місцями:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Унаслідок цієї властивості мішані добутки $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ і $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ позначають більш простим символом: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

3. Якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку, а якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0$, то ліву.
4. Модуль мішаного добутку $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, віднесених до спільного початку.
5. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і лише тоді, коли $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$ (умова компланарності трьох векторів).

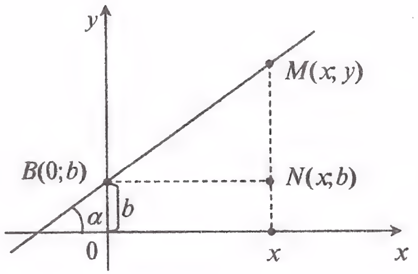
<u>**Теорема 2.3.**</u> ***Якщо*** $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, ***то***

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

10. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма перетинає вісь Oy в точці $B(0;\ b)$ і утворює з віссю Ox кут



α $(0<\alpha<\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2})$. Візьмемо на прямій довільну точку $M(x;y)$. Тоді з прямокутного трикутника MBN знайдемо

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{MN}{NB}=\frac{y-b}{x}.$$

Тангенс кута нахилу прямої до осі Ox називають ***кутовим коефіцієнтом прямої*** і позначають буквою k: $k=\operatorname{tg}\alpha$. Тоді $k=\frac{y-b}{x}$, або

$$y=kx+b. \qquad (2.1)$$

Рівняння (2.1) називають ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.***

Загальне рівняння прямої

Теорема 2.2. ***Будь-яке лінійне рівняння***

$$Ax+By+C=0\ \ (A^2+B^2\neq 0) \qquad (2.2)$$

є рівнянням деякої прямої.

Рівняння (2.2) називають ***загальним рівнянням прямої.*** Якщо $B\neq 0$, то рівняння (2.2) можна розв'язати відносно y:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт прямої (2.2) дорівнює $k=-\frac{A}{B}$.

13. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Загальним рівнянням другого степеня називається рівняння

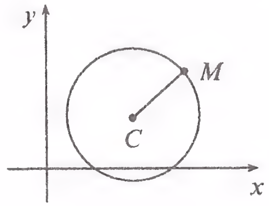
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (2.13)$$

де $A^2+B^2+C^2\neq 0$. На площині xOy рівняння (2.13) може визначати лінії другого порядку (коло, еліпс, гіперболу, параболу), а також дві прямі, одну пряму, точку або не визначати жодної точки.

Коло

Колом називають геометричне місце точок площини рівновіддалених від фіксованої точки – центра кола.

Виведемо рівняння кола радіуса R з центром у точці $C(x_0;y_0)$. Точка



$M(x;y)$ лежатиме на колі тоді і лише тоді, коли $CM=R$ або $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$.

Підносячи обидві частини цього рівняння до квадрата, одержимо рівняння

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (2.14)$$

Якщо центр кола міститься в початку координат, то $x_0=y_0=0$ і рівняння (2.14) матиме вигляд:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (2.15)$$

Рівняння (2.15) називається ***канонічним рівнянням кола.***

Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок (фокусів) є величина стала, більша ніж відстань між фокусами.

Виведемо рівняння еліпса, фокуси якого F_1 і F_2 розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат.

Розв'язання

а) Канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно до вектора $\vec{s} = (m, n, p)$, мають вигляд (2.11). Оскільки за напрямний вектор осі Ox можна узяти вектор $\vec{s} = \vec{i} = (1; 0; 0)$, то шукані канонічні рівняння матимуть вигляд :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{0}.$$

б) Напрямний вектор прямої $\begin{cases} x = 4 - t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 5 - 6t \end{cases}$ такий: $\vec{s} = (-1; 2; -6)$. Тому шукані канонічні рівняння мають вигляд:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+4}{6}.$$

в) За напрямний вектор прямої, яка проходить через точки $M_1(3; 2; 2)$ і $M_2(-1; 3; 4)$, можна узяти вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-4; 1; 2)$. Цей вектор $\vec{s}$ буде також і напрямним вектором шуканої прямої. Тому канонічні рівняння шуканої прямої будуть такими:

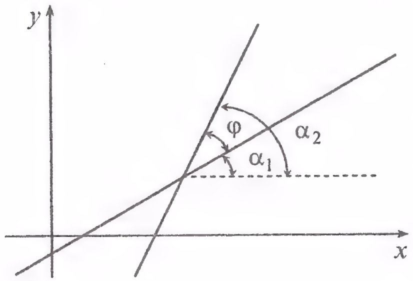
$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}.$$

Відповіді: а) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{0}$; б) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+4}{6}$;

в) $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$.

<u>Кут між двома прямими</u>

Нехай дві прямі мають кутові коефіцієнти $k_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_2$.



Як видно з рисунка, кут φ між цими прямими дорівнює $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Звідси

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \mathrm{tg}\,\alpha_2}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha_2 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha_2},$$

або

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

З цієї формули легко одержати умови паралельності й перпендикулярності двох прямих l_1 і l_2:

$$l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2;$$

$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 \cdot k_2 = -1 \ \ (\text{або } k_2 = -\frac{1}{k_1}).$$

<u>Рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт</u>

Виведемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$ і має кутовий коефіцієнт k. Запишемо рівняння шуканої прямої у вигляді

$$y = k\,x + b. \tag{2.3}$$

Оскільки точка M_1 лежить на цій прямій, то її координати задовольняють рівняння (2.3):

$$y_1 = kx_1 + b. \tag{2.4}$$

Віднімаючи від рівняння (2.3) рівняння (2.4), одержимо рівняння шуканої прямої:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2.5}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Виведемо рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$. Оскільки пряма проходить через точку M_1, то її рівняння можна записати у вигляді (2.5), де k – невідомий кутовий коефіцієнт цієї прямої. Оскільки точка M_2 лежить на цій прямій, то її координати задовольняють рівняння (2.5):

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Звідси знаходимо $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ і підставляємо в (2.5):

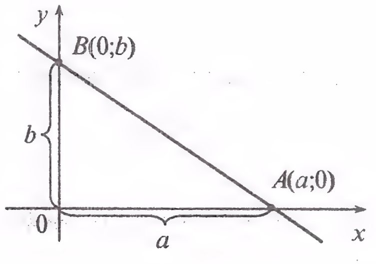
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Останнє рівняння зручно записати так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Рівняння прямої у відрізках

Складемо рівняння прямої, яка відтинає на вісі Ox відрізок $a \neq 0$, а на осі Oy – відрізок $b \neq 0$. Така пряма проходить через дві точки $A(a;0)$ і $B(0;b)$. Тому її рівняння має вигляд



$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0},$$

або

$$-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}.$$

Врешті шукане рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка прямої. З умови $\overline{M_1 M} \parallel \overline{M_1 M_2}$ дістанемо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Кут між двома прямими. Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих

Кут φ між двома прямими

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad (l_1), \qquad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \quad (l_2)$$

можна знайти як кут між їх напрямними векторами $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, тобто

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1|\,|\bar{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\,\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Приклад 2.8. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3; 2; -4)$ паралельно:

а) осі Ox;

б) прямій $\begin{cases} x = 4 - t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 5 - 6t; \end{cases}$

в) прямій, що проходить через точки $M_1(3; 2; 2)$ і $M_2(-1; 3; 4)$.

12. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

Загальні рівняння прямої

Пряму в просторі можна задати як лінію перетину двох площин

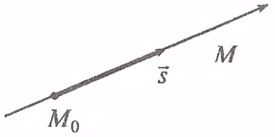
$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.10)$$

за умови, що ці площини не паралельні і не зливаються. Рівняння (2.10) називаються ***загальними рівняннями прямої у просторі.***

Канонічні рівняння прямої

Кожний вектор, що не дорівнює нулю, який лежить на даній прямій або паралельний до неї, називається ***напрямним вектором*** цієї прямої.

Нехай $\vec{s} = (m, n, p)$ – напрямний вектор прямої, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – фіксована точка прямої, $M(x; y; z)$ – довільна точка прямої. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ і $\vec{s} = (m, n, p)$ колінеарні, то їх координати пропорційні:



$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (2.11)$$

Рівняння (2.11) називаються ***канонічними рівняннями прямої у просторі.***

Параметричні рівняння прямої

Позначимо через t кожне з рівних відношень у рівняннях (2.11):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Звідси

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (2.12)$$

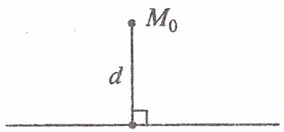
Рівняння (2.12) називаються ***параметричними рівняннями прямої***, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (m, n, p)$.

Відстань від точки до прямої

Під відстанню від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої

$$Ax + By + C = 0$$

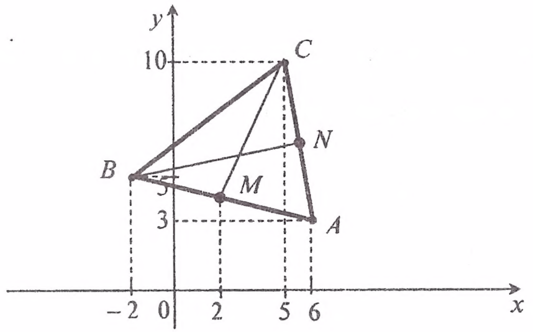
розуміють довжину d перпендикуляра, опущеного на цю пряму з точки M_0. Ця довжина визначається за формулою:



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад 2.5. Дано вершини трикутника ABC: $A(6; 3)$, $B(-2; 5)$, $C(5; 10)$. Знайти рівняння сторони BC, медіани CM, висоти BN, довжину CM і BN, кут при вершині B. Зробити рисунок у декартовій прямокутній системі координат.

Розв'язання. Зробимо рисунок у декартовій прямокутній системі координат:



Знайдемо рівняння сторони BC як рівняння прямої, що проходить через задані точки $B(-2; 5)$ і $C(5; 10)$.

$$BC: \quad \frac{x + 2}{5 + 2} = \frac{y - 5}{10 - 5},$$

$$5(x + 2) = 7(y - 5),$$

$$\underline{5x - 7y + 45 = 0} \qquad (BC).$$

Щоб знайти рівняння медіани CM, обчислимо спочатку координати точки M, враховуючи, що точка M є серединою відрізка AB, та скористаємося рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки C і M:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6-2}{2} = 2, \qquad y_M = \frac{y_A - y_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4.$$

Тобто $M(2;4)$, $C(5;10)$. Тоді

$$CM: \quad \frac{x-2}{5-2} = \frac{y-4}{10-4},$$

$$6(x-2) = 3(y-4),$$

$$2x - y = 0 \qquad (CM).$$

Для знаходження рівняння висоти BN використаємо умову перпендикулярності прямих AC і BN: $k_{BN} = -\frac{1}{k_{AC}}$. Оскільки

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{10-3}{5-6} = -7,$$

то $k_{BN} = \frac{1}{7}$.

Запишемо рівняння висоти BN як рівняння прямої, що проходить через точку $B(-2;5)$, та має кутовий коефіцієнт $k_{BN} = \frac{1}{7}$.

$$BN: \quad y - 5 = \frac{1}{7}(x+2),$$

$$7(y-5) = x + 2,$$

$$\underline{x - 7y + 37 = 0} \qquad (BN).$$

Довжину CM знайдемо як відстань між двома точками $C(5;10)$ і $M(2;4)$:

$$CM = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (10-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Довжину BN будемо шукати як відстань від точки $B(-2;5)$ до прямої AC. Для цього спочатку знайдемо рівняння прямої AC.

координати даних точок і, розкриваючи визначник, знайдемо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+2 \\ 1-1 & 3-0 & 1+2 \\ 4-1 & 1-0 & -2+2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$9y - 9(z+2) - 3(x-1) = 0,$$

$$(x-1) - 3y + 3(z+2) = 0,$$

$$x - 3y + 3z + 5 = 0.$$

Відповіді: а) $7x + 3y - 2z - 7 = 0$; б) $y + 4 = 0$; в) $x - 3y + 3z + 5 = 0$.

__Приклад 2.7__. Визначити, за яких значень параметрів a і b площини

а) $2x + ay + 3z - 1 = 0$ і $4x - y - bz = 0$ паралельні;

б) $3x + 2y + az = 0$ і $x - y + 2z + 5 = 0$ перпендикулярні.

Розв'язання

а) Площини $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ паралельні тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Звідси

$$\frac{2}{4} = \frac{a}{-1} = \frac{3}{-b} \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}5, \; b = -6.$$

б) Площини $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ перпендикулярні тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Для даних площин ця умова має вигляд:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + a \cdot 2 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знайдемо a:

$$3 - 2 + 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}5.$$

Відповіді: а) $a = -0{,}5$, $b = -6$; б) $a = -0{,}5$.

$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, тобто

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\ |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Приклад 2.6. Скласти рівняння площини, яка:

а) проходить через точку $M_0(2;-3;-1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (7;3;-2)$;

б) проходить через точку $M_0(5;-4;3)$ паралельно площині xOz;

в) проходить через точки $M_1(1;0;-2)$, $M_2(1;3;1)$, $M_3(4;1;-2)$.

Розв'язання

а) Рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A;B;C)$, має вигляд (2.6). Підставивши в це рівняння координати точки $M_0(2;-3;-1)$ і вектора $\vec{n} = (7;3;-2)$, дістанемо

$$7(x-2) + 3(y+3) - 2(z+1) = 0,$$

або

$$7x + 3y - 2z - 7 = 0.$$

б) Загальне рівняння площини, яка паралельна площині xOz, має вигляд

$$By + D = 0.$$

Підставивши в це рівняння координати точки $M_0(5;-4;3)$, знайдемо співвідношення між коефіцієнтами B і D:

$$B\cdot(-4) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 4B.$$

Шукане рівняння площини матиме вигляд $By + 4B = 0$ або

$$y + 4 = 0.$$

в) Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, має вигляд (2.8). Підставляючи в це рівняння

$$AC: \quad \frac{x-6}{5-6} = \frac{y-3}{10-3},$$

$$7(x-6) = -(y-3),$$

$$7x + y - 45 = 0 \qquad (AC).$$

Тоді

$$BN = \frac{|7\cdot(-2) + 1\cdot 5 - 45|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{54}{\sqrt{50}} = \frac{27\sqrt{2}}{5}.$$

Для знаходження величини кута при вершині B обчислимо кутові коефіцієнти прямих AB і BC:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{-2-6} = -\frac{1}{4}, \qquad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{10-5}{5+2} = \frac{5}{7}.$$

Тоді

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \pm\frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB}\cdot k_{BC}} = \pm\frac{-\frac{1}{4} - \frac{5}{7}}{1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{7}} = \pm\frac{27}{23}.$$

Враховуючи, що кут $\hat{B}$ гострий, знаходимо:

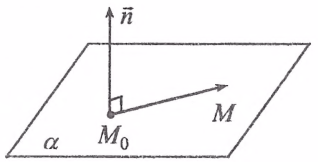
$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{27}{23}, \qquad \hat{B} = \operatorname{arctg}\frac{27}{23} \approx 49{,}6^\circ.$$

Відповідь: BC: $5x - 7y + 45 = 0$; CM: $2x - y = 0$; BN: $x - 7y + 37 = 0$; $CM = 3\sqrt{5}$; $BN == \frac{27\sqrt{2}}{5}$; $\hat{B} \approx 49{,}6^\circ$.

11. ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

Загальне рівняння площини

Візьмемо на площині α дві точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M(x;y;z)$ і виберемо будь-який вектор $\vec{n} = (A,B,C)$, що не дорівнює нулю і є перпендикулярним до цієї площини. Довільний такий вектор $\vec{n}$ називається ***нормальним вектором площини***.



Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overline{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{n}\cdot\overline{M_0M}=(A,B,C)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0,$$

або

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (2.6)$$

Рівняння (2.6) називається ***рівнянням площини, яка проходить через задану точку*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***перпендикулярно до вектора*** $\vec{n}=(A,B,C)$.

Якщо в рівнянні (2.6) розкрити дужки і позначити $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, то одержимо ***загальне рівняння площини***

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2.7)$$

Отже, всяка площина в прямокутній декартовій системі координат визначається рівнянням першого степеня. Можна показати, що справедливе й обернене твердження: усяке рівняння першого степеня виду (2.7) в прямокутній системі координат визначає площину.

Неповні рівняння площини

1. Якщо $D=0$, то рівняння (2.7) має вигляд:

$$Ax+By+Cz=0.$$

Це рівняння задовольняють координати точки $O(0;0;0)$. Тому воно визначає площину, яка проходить через початок координат.

2. Якщо $A=0$, то рівняння (2.7) має вигляд:

$$By+Cz+D=0.$$

Оскільки нормальний вектор цієї площини $\vec{n}=(0,B,C)$ перпендикулярний до осі Ox, то це рівняння визначає площину, паралельну осі Ox. Аналогічно площина $Ax+Cz+D=0$ паралельна осі Oy, а площина $Ax+By+D=0$ паралельна осі Oz.

3. Якщо $A=B=0$, то рівняння (2.7) набирає вигляду:

$$Cz+D=0.$$

З випадку 2 випливає, що це рівняння визначає площину, яка паралельна осям Ox і Oy, тобто площину, паралельну площині xOy. Аналогічно площина $By+D=0$ паралельна площині xOz, а площина $Ax+D=0$ паралельна площині yOz.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.8)$$

Рівняння площини у відрізках

Нехай площина відтинає на осях координат відрізки $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, тобто проходить через точки $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;0;c)$. Підставляючи координати цих точок у рівняння (2.8) і розкриваючи визначник, дістанемо

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0,$$

$$xbc-abc+zab+yac=0,$$

або

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (2.9)$$

Рівняння (2.9) називається ***рівнянням площини у відрізках***.

Кут між двома площинами. Умови паралельності й перпендикулярності двох площин

Кут φ між двома площинами

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad (\alpha_1)$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \quad (\alpha_2)$$

можна знайти як кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і